

ANNALEN DER PHYSIK

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH
F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF,
G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE

VIERTE FOLGE

BAND 72
DER GANZEN REIHE 377. BAND

KURATORIUM:
M. PLANCK, G. QUINCKE, E. WARBURG

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK

MIT ZWEI TAFELN



I 9 2 3

LEIPZIG · VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH

Bestel
buchh
à 8 He
Dänen
Japan

PERIODICAL ROOM
GENERAL LIBRARY
UNIV. OF MICH.

ANNALEN DER PHYSIK

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH
F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF,
G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE

VIERTE FOLGE
BAND 72 HEFT 1
DER GANZEN REIHE 377. BANDES 1. HEFT

KURATORIUM:
M. PLANCK, G. QUINCKE, E. WARBURG

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK



L E I P Z I G

VERLAG VON JOHANN AMBROSIOUS BARTH

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen und der Verlagsbuchhandlung entgegengenommen. Im Jahre 1923 erscheinen Bd. 70, 71, 72 und 73 à 8 Hefte. Preis von Band 72 für Belgien u. Luxemburg Fr. 60.—, Frankreich Fr. 50.—, Dänemark Kr. 18.—; England £ -16—; Finnland Marka 100.—; Holland fl. 10.—; Japan £ -16—; Italien Lire 60.—; Norwegen Kr. 20.—, Schweden Kr. 14.—; Schweiz Fr. 20.—, Spanien Pes. 20.—; U.S.A. \$ 4.—.

Ausgegeben am 10. Juli 1923.

Inhalt.

	Seite
1. Friedrich Trautmann. Über den Hochfrequenzwiderstand von geraden Drähten, die mit leitenden Mänteln versehen sind	1
2. K. Försterling. Über die Fortpflanzung elektrischer Wellen an einem geraden Metalldraht, der mit einem leitenden Mantel versehen ist.	30
3. Franz Selety. Erwiderung auf die Bemerkungen Einsteins über meine Arbeit „Beiträge zum kosmologischen Problem“ .	58
4. Alfred Klose. Über ausgezeichnete Energiewerte in mechanischen Systemen.	67

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr **Geh. Hofrat Prof. W. Wien** übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **München, Leopoldstraße 91.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Für die Aufnahme von Dissertationen gelten besondere Bedingungen, welche vom Verlag bekannt gegeben werden.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger Abdruck der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzeichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

te

1

0

8

7

a

e

a

e

a

e

a

e

a

e

a

e

X

1

2

3

4

1

2

3

4

1

2

3

4

1

2

3

4

Inhalt.

Vierte Folge. Band 72.

Siebzehntes Heft.

Seite

1. Friedrich Trautmann. Über den Hochfrequenzwiderstand von geraden Drähten, die mit leitenden Mänteln versehen sind 1
2. K. Försterling. Über die Fortpflanzung elektrischer Wellen an einem geraden Metalldraht, der mit einem leitenden Mantel versehen ist. 30
3. Franz Selety. Erwiderung auf die Bemerkungen Einsteins über meine Arbeit „Beiträge zum kosmologischen Problem“ 58
4. Alfred Klose. Über ausgezeichnete Energiewerte in mechanischen Systemen. 67

Ausgegeben am 10. Juli 1923.

Achtzehntes Heft.

1. Emil Rupp. Über erregende Absorption und Tilgung der Phosphore 81
2. Nina Wedeneewa. Über Absorption und anomale Rotationsdispersion des Kampferchinons 122
3. W. Alexandrow. Über den kugelsymmetrischen Vakuumvorgang in der Einsteinschen Gravitationstheorie 141
4. Georg Jacoby. Über die elektrische Polarisation des Dielektrikums 153

Ausgegeben am 20. Juli 1923.

Neunzehntes Heft.

1. F. Waibel. Über die Druckabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten von Schwefelkohlenstoff, Benzol, Hexan und Luft 161
2. E. Grüneisen und E. Goens. Schallgeschwindigkeit in Stickstofftetroxyd. Eine untere Grenze seiner Dissoziationsgeschwindigkeit 193
3. Gerold von Gleich. Die allgemeine Relativitätstheorie und das Merkurperihel 221
4. Carl Benedicks. Magnetischer Schutzpanzer aus spiralgewickeltem Eisenblech 236

Ausgegeben am 7. August 1923.

Zwanzigstes Heft.

1. C. Dieterici. Eine mechanische Theorie der Lösungen 241
2. Carl Ramsauer. Die Massenbewegung des Wassers bei Unterwasserexplosionen 265
3. A. Michels. Einfluß der Rotation auf die Empfindlichkeit einer absoluten Druckwaage 285
4. Friedrich Kottler. Berichtigung zu der Abhandlung „Elektromagnetische Theorie der Beugung“ 320

Ausgegeben am 21. August 1923.

Einundzwanzigstes Heft.

	Seite
1. D. Enskog. Zur Quantentheorie des Dampfdruckes und der Dissoziation	321
2. Carl Ramsauer. Über den Wirkungsquerschnitt der Gasmoleküle gegenüber langsamen Elektronen. II. Fortsetzung und Schluß	345
3. Johannes Fischer. Über die Beugungserscheinungen bei sphärischer Aberration	353
4. Wilhelm Peter Radt. Über die Bremsung bewegter Ladungen beim Überfliegen leitender Körper.	400

Ausgegeben am 25. September 1923.

Zweiundzwanzigstes Heft.

1. W. Gordon. Zur Lichtfortpflanzung nach der Relativitätstheorie	421
2. Aloys Wenzl. Gegen ein Mißverständnis der Äquivalenzhypothese	457
3. A. Joffé. Elektrizitätsdurchgang durch Kristalle	461

Ausgegeben am 28. September 1923.

Dreiundzwanzigstes Heft.

1. E. Bratke und E. Waetzmann. Über eine Abart der Jaminschen Interferenzanordnung	501
2. Otto Halpern. Über die Verwendung von selektiv durchlässigen Spiegeln in der Strahlungstheorie	516
3. Hans Kneser. Untersuchungen an einem Glimmlicht-Gleichrichter für Wechselstrom. (Hierzu Tafel I und II)	519
4. Walter Kopp. Untersuchung stehender elektromagnetischer Wellen mit ungedämpfter Erregung	525
5. Joh. Thiele. Über die zeitliche Änderung der Thermokräfte bei Eisen, Nickel und Kobalt nach dem Ziehen oder Magnetisieren	549
6. Hans Kuppenheim. Nachtrag zu der Arbeit: Über die Beständigkeit der Phosphoreszenzzentren. I.	564

Ausgegeben im Oktober 1923.

Vierundzwanzigstes Heft.

1. Gerhard C. Schmidt und Roland Walter. Über die Elektrizitätsleitung von Salzdämpfen. Abhandlung IV	565
2. A. Karolus. Untersuchung über das kontinuierliche Röntgenspektrum bei verschiedenen Entladungsfrequenzen	595
3. Friedrich von Rautenfeld. Zur Elektrizitätsleitung in Kristallen	617

Ausgegeben im November 1923.

Nachweis zu den Figurentafeln.

Tafel I u. II. H. Kneser.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 72

1. *Über den Hochfrequenzwiderstand von geraden Drähten, die mit leitenden Mänteln versehen sind;* *von Friedrich Trautmann.*

Inhalt: Einleitung. Geschichtliches. Ziel der Arbeit. — Die Methode der elektrischen Messungen. — Die elektrische Meßeinrichtung. a) Erregerkreis. b) Meßkreis. c) Indikatorkreis. d) Die Vergleichwiderstände. — Das Galvanisieren. a) Elektroden und Rührvorrichtungen. b) Bäder. — Die Bestimmung der Mantelstärke. — Theoretisches. — Ergebnisse. a) Fehlerquellen. b) Die Ergebnisse der Untersuchungen. — Zusammenfassung.

Einleitung.

In den letzten beiden Jahrzehnten des vorigen Jahrhunderts begannen Wissenschaft und Technik, den Wechselströmen und — im Anschluß an die Untersuchungen von Hertz — vor allem den schnellen Schwingungen ein großes Interesse zuzuwenden. Dabei richtete sich die Aufmerksamkeit auch auf die schon von Maxwell behandelte Hautwirkung, und diese wurde in der Folge vor allem für den einfacheren Fall des geraden einmetallischen Leiters durch eine größere Zahl von Untersuchungen geklärt. Als grundlegend mögen hier die Arbeiten von Stefan und Rayleigh¹⁾ hervorgehoben werden, denen bis in die neueste Zeit eine ganze Reihe von Untersuchungen folgte, die sich größtenteils mit der besonderen Lösung des Problems für Eisenleiter befassen.

Rein experimentelle Untersuchungen über die Hautwirkung in gestreckten Leitern veröffentlichte im Jahre 1892 Bjerknes.²⁾ Er schloß gleichgeformte Drähte verschiedenen Materials mit einem Elektrometer zu einem Schwingungskreis von 420 cm Wellenlänge und fand, im Gegensatz zu einer von

1) J. Stefan, Wiener Ber. 95. II. Abtlg. 1887; Lord Rayleigh, Phil. Mag. 21. S. 387. 1886.

2) V. Bjerknes, Ann. d. Phys. 47. S. 69. 1892.

Hertz in seiner ersten grundlegenden Abhandlung gemachten Annahme, daß die besonderen Eigenarten der Metalle in bezug auf spezifischen Widerstand und magnetisches Verhalten auch bei den schnellen Schwingungen noch wirksam werden. Weitere Untersuchungen machte Bjerknes¹⁾ im Jahre 1893 auf Grund der Hertz'schen Spiegelversuche. Diese hatten gezeigt, daß sehr dünne Silberschichten die Wellen durchließen, hinlänglich dicke Platten dagegen nicht. Die Wellen sind also fähig in Metalle einzudringen, doch können nur die Oberflächenschichten die Erscheinung beeinflussen. Bjerknes entnahm daraus, daß es für die Fortpflanzung von elektromagnetischen Wellen an Drähten ohne Belang sein würde, wenn das Innere des Leiters entfernt und durch irgendeinen anderen Stoff ersetzt würde. Er verwandte dieselbe Anordnung wie bei der ersten Untersuchung. Als Leiter nahm er verschiedene Metalle und überzog sie galvanisch mit stufenweise verstärkten metallischen Mänteln. Dabei zeigte sich, daß bei der schon früher verwendeten Wellenlänge von 420 cm sehr dünne Mäntel genügten, um das Seelenmetall praktisch auszuschalten. Seinen Kurven ist zu entnehmen, daß die Wirkung des Seelenmetalls aufhörte bei etwa 0,0026 cm Zn auf Cu, bei etwa 0,00076 cm Cu auf Fe, bei etwa 0,00103 cm Ni auf Cu, bei etwa 0,00124 cm Fe auf Cu. Der Seelendraht hatte einen Durchmesser von 0,05 cm.

Wertvolle mechanische Eigenschaften, die man solchen bimetallischen Drähten bei guter Leitfähigkeit verleihen kann, haben ihnen dann auch Eingang in die Technik verschafft. Z. B. erwähnt Zenneck in seinem Lehrbuch der drahtlosen Telegraphie die verkupferten Stahldrähte der Eiffelturmantenne; und auch die Fernsprechtechnik hat Gebrauch von stark verkupferten Eisendrähten gemacht.

In erster Linie mit letzteren beschäftigt sich eine Untersuchung von J. M. Miller²⁾, und zwar für Frequenzen bis 5000. Die Arbeit gibt u. a. auch eine allerdings in ihrem Gültigkeitsbereich stark beschränkte Formel für die Berechnung des Widerstandes solcher bimetallischer Leiter an. Das Ganze ist aber in erster Linie darauf angelegt, der Fern-

1) V. Bjerknes, Ann. d. Phys. 48. S. 596. 1893.

2) J. M. Miller, Eff. Resist. a. Induct. of Iron a. bimettal.; Wires, Bull. Bur. Stand. 12. Nr. 2. S. 207. 1915.

sprechtechnik zu dienen und gibt keine systematische Untersuchung für verschiedene Mantelstärken.

Weitere Arbeiten auf diesem Gebiete sind mir nicht bekannt geworden. Es war daher der Zweck der vorliegenden Arbeit, durch systematische Untersuchung des Widerstandes von mit leitenden Mänteln versehenen geraden Leitern in bezug auf Abhängigkeit von Mantelstärke und Frequenz weitere Aufklärung anzustreben.

Plan der Untersuchungen.

Es sollten untersucht werden:

- I. Metallische Drähte mit Mänteln geringer Leitfähigkeit (Elektrolyten).
- II. Metallische Drähte mit metallischen Mänteln.
 - a) Drähte aus nicht ferromagnetischen Metallen mit nicht ferromagnetischen Mänteln.
 1. Drähte geringerer Leitfähigkeit mit gutleitenden Mänteln.
 2. Drähte guter Leitfähigkeit mit weniger gut leitenden Mänteln.
 - b) Drähte aus ferromagnetischen Metallen mit nicht ferromagnetischen Mänteln.
 - c) Drähte aus nicht ferromagnetischen Metallen mit ferromagnetischen Mänteln.

Diese allgemeinen Gesichtspunkte schließen natürlich eine große Zahl von Variationsmöglichkeiten ein, und es mußte zur Vermeidung einer allzuweiten Ausdehnung der Arbeit schon unter den naheliegenden Möglichkeiten eine Auswahl getroffen werden. So wurden nur für Punkt I verschieden starke Seelendrähte untersucht. Unter den übrigen Punkten beschränkten sich die Messungen auf Seelendrähte von rund 0,2 cm Durchmesser. Unter II. a) 2. war verzinkter Kupferdraht in Aussicht genommen. Die Verzinkung machte aber später zu erörternde Schwierigkeiten, und es mußte schließlich auf Untersuchung dieses Punktes verzichtet werden, da äußere Umstände zum Abschluß der Arbeit drängten. Die Untersuchungen von Bjerknæs lassen aber auch keine grundlegenden Unterschiede gegenüber II. a) 1. erwarten.

Es wurden bei Wellenlängen von 50 bis 900 m, zum Teil bis 1800 m, sowie sehr verschiedenen Mantelstärken untersucht:

- I. a) Kupferdraht von 0,048 cm Durchmesser mit Mänteln von Schwefelsäure, Kaliumchloridlösung und Kochsalzlösung.
- b) Kupferdraht von 0,096 cm Durchmesser mit Mänteln von Kochsalzlösung.
- II. a) Messingdraht mit Kupfermantel.
- b) 1. Eisendraht mit Kupfermantel.
2. Stahldraht mit Kupfermantel.
- c) Kupferdraht mit Eisenmantel.

Die Methode der elektrischen Messungen.

Für die beabsichtigten Untersuchungen war eine elektrische Meßmethode auszuwählen, die bei einfacher Handhabung gestattete, auch kleine Widerstände mit ausreichender Genauigkeit bei Hochfrequenz zu messen. Bekannte Methoden, Widerstandsgrößen für Hochfrequenzströme zu messen, sind die historische Bjerknessche Resonanzkurvenmethode und das von Lindemann¹⁾ angegebene Verfahren. Die erstere erscheint auch in ihren Abänderungen von vornherein nicht zur Erreichung der nötigen Genauigkeit geeignet. Einfacher und bei einiger Vorsicht²⁾ von weitergehender Genauigkeit ist das Lindemannsche Verfahren, das unmittelbar den Widerstand des Kreises ergibt.

Beide Methoden aber bringen Schwierigkeiten, wenn Widerstände von Leiterteilen bestimmt werden sollen, die für sich bei den in Frage kommenden Frequenzen kein schwingungsfähiges System bilden können. Diese müssen in einen größeren Meßkreis eingefügt werden, dessen Widerstand dann mit und ohne den unbekannten Leiter zu messen wäre. Aus der Differenz würde sich der gesuchte Widerstand ergeben. Daraus müssen aber bei Differenzen, die klein gegen die Gesamtwiderstände sind, erhebliche Fehler entstehen.

1) R. Lindemann, *Jahrb. f. drahtl. Tel.* 4. S. 561. 1911.

2) S. Löwe, *Jahrb. f. drahtl. Tel.* 6. S. 325, 451. 1912/13; 7. S. 365. 1913.

In bezug auf die allgemeine Meßgenauigkeit dem Lindemannschen Verfahren gleichwertig, wegen der Vermeidung der Differenzbildung aber günstiger muß daher ein Verfahren sein, das durch Ersatz des gesuchten Widerstandes durch einen bekannten nach Art der Substitutionsmethode für Gleichstrom zum Ziel kommt.

Dieser Weg ist von E. Schott¹⁾ in seiner Jenaer Dissertation eingeschlagen worden. Er mißt den gesuchten Widerstand durch Einsetzen eines kontinuierlich veränderlichen, auf dem Transformatorprinzip beruhenden Widerstandes, indem er mit dem Meßkreis induktiv einige kurzgeschlossene Drahtwindungen koppelt und durch Änderung der Koppelung scheinbar den Widerstand des Kreises ändert. Die Anordnung wird punktweise durch praktisch skineffektfreie und daher durch Gleichstrommessungen feststellbare Einzelwiderstände geeicht, doch ist die Eichung natürlich für jede benötigte Frequenz vorzunehmen. Es liegt nahe, die bei allen Frequenzen richtigen Einzelwiderstände unmittelbar zur Messung zu benutzen, und den jetzt allerdings nicht genau einzustellenden Wert aus den Ausschlägen des Meßinstrumentes bei zwei dem wahren Widerstand benachbarten Vergleichswiderständen zu interpolieren. Nach diesem Verfahren, das übrigens auch von Schott bereits gestreift wurde, wurden die vorliegenden Untersuchungen durchgeführt.

Die Apparatur besteht wie bei Bjerknes und Lindemann aus Erreger-, Meß- und Indikatorkreis. In den Meßkreis wird einmal der zu prüfende Leiter und dann ein gleichgeformter Kupferleiter, dessen Widerstand nach den bekannten Formeln leicht mit genügender Genauigkeit zu errechnen ist, unter Zusatz der erwähnten Widerstände eingefügt. Gelten dabei die Bezeichnungen: R_1 und R_2 für die zugefügten Widerstände, ΔR für den Unterschied zwischen den beiden Leitern, a_1 , a_2 und a_d für die entsprechenden Ausschläge des Indikatorinstrumentes, so ergibt sich für einen quadratisch anzeigenden Indikator (Thermokreuz) nach Umformung der für die drei Messungen aus dem Ohmschen Gesetz im Resonanzfall sich ergebenden Gleichungen:

1) E. Schott, Hochfrequenzverluste bei Gläsern und einigen anderen Dielektrizis. Jenaer Diss. 1921, auch Jahrb. der drahtl. Tel. 18. S. 82, 1921.

$$(I) \quad \Delta R = R_1 + (R_2 - R_1) \frac{\sqrt{\frac{a_1}{a_A}} - 1}{\sqrt{\frac{a_1}{a_2}} - 1}.$$

Hierbei ist natürlich Proportionalität zwischen dem Stromquadrat und dem Instrumentenausschlag vorausgesetzt, doch sind aus einem etwaigen Mangel in dieser Beziehung wesentliche Fehler nicht zu erwarten. R_1 und R_2 sollen sich ja dem ΔR möglichst annähern, so daß es sich bei den drei erforderlichen Messungen um fast gleiche Ausschläge handelt. Darin liegt allerdings andererseits ein Mangel begründet, weil dadurch $\sqrt{a_1/a_A}$ bzw. $\sqrt{a_1/a_2}$ fast 1 werden, so daß die Differenzen in Zähler und Nenner des Bruches des zweiten Gliedes klein werden gegen die ersten Glieder der Differenzen. Da aber das zweite Glied gegen R_1 überhaupt klein sein soll, wird daraus eine größere Fehlerquelle nicht entstehen können.

Als ein bequemes Hilfsmittel erweist sich bei Messungen der vorliegenden Art die Kompensationsschaltung von Lindeck und Rothe.¹⁾ Die an dem als Schwingungsanzeiger benutzten Thermokreuz erzeugte Spannung wird durch eine Gegenspannung kompensiert (Fig. 1). Diese wird an einem kleinen Widerstand eines Hilfsstromkreises erzeugt, in welchem ein Gleichstrom durch Vorschaltwiderstände passend eingestellt wird, bis das Galvanometer in der Ruhelage bleibt. Der Thermokraft proportional (und damit den in Gleichung (I) eingesetzten Galvanometerausschlägen) ist dann der Strom im Hilfskreis, und dieser wiederum bei geeigneter Auswahl der Widerstandsverhältnisse sehr angenähert umgekehrt proportional dem Vorschaltwiderstand a . Das heißt: Es wird aus Gleichung (I) bei entsprechender Bezeichnung:

$$(I') \quad \Delta R = R_1 + (R_2 - R_1) \frac{\sqrt{\frac{a_A}{a_1}} - 1}{\sqrt{\frac{a_2}{a_1}} - 1}.$$

1) S. Lindeck u. R. Rothe, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 20. S. 293, 1900.

Die elektrische Meßeinrichtung (Fig. 1).

Erregerkreis.

Grundbedingung für die Messungen war zunächst weitgehende Konstanz des Erregerstromes wenigstens für die Dauer einer in drei Einzelmessungen zerfallenden Messung, d. h. also für etwa 3—5 Minuten, da die Messungen immer

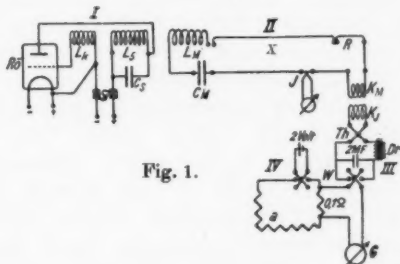


Fig. 1.

vor- und rückwärts ausgeführt wurden. Diese Konstanz wurde erst nach vielen Schwierigkeiten und Erfahrungen erreicht. Als Schwingungserzeuger wurde ein Röhrensender benutzt, an dem alle Verbindungen bis auf die Röhrensteckkontakte und die unbedingt häufiger zu lösenden Verbindungen die als gut amalgamierte Quecksilberkontakte ausgebildet wurden, sauber verlötet wurden. Dies trug sehr zur Konstanthaltung des Stromes bei. Da zunächst Senderröhren nicht zur Verfügung standen, wurden eingehende Versuche mit parallel geschalteten Verstärkerröhren gemacht. Es gelang dabei nicht, die nötige Konstanz zu erreichen. Daher wurden später ausschließlich RS 5-Senderröhren von Telefunken verwendet. Auch diese gaben jedoch nicht ohne Auswahl die erwünschte Konstanz. Es zeigte sich, daß anscheinend nur Röhren mit eingeschweißten Heizfäden brauchbar waren. Bei anderen ergaben sich offensichtlich bald Kontaktschwankungen an den Einklemmstellen des Heizfadens, denn es ließen sich mit dem Kompensationsapparat Spannungsschwankungen am Heizfaden feststellen, die sicher nicht auf Vorgänge außerhalb der Röhre zurückzuführen waren. Die Schwankungen waren jedoch im allgemeinen nicht sehr erheblich, und bewirkten nur infolge der empfindlichen Meßanordnung Störungen.

Meßkreis.

Dem Aufbau des Meßkreises war als wesentliches Prinzip die Erreichung geringer Dämpfung zugrunde gelegt, damit in dem zu untersuchenden Draht ein wesentlicher Teil des Widerstandes dieses Kreises lag. Die Spulen waren aus 5 mm starkem Rundkupfer oder etwa 15 mm breitem und 1 mm starkem Kupferband hergestellt, die Verbindungsleitungen aus gleichem Kupferband. Durch verschiedene Spulen L_M wurde eine grobe Abstimmung erzielt. Die Feinabstimmung erfolgte durch Luftkondensatoren, und zwar durch einen größeren und einen kleinen Drehkondensator sowie einen aus einem Funkenmikrometer behelfsmäßig hergestellten Kohlrauschkondensator, der die Abstimmung der kleinen Wellen sehr erleichterte. Für die längeren Wellen wurden noch „Minos-Glasplattenverdichter“ der Firma Schott & Gen. parallel gelegt. Die Einstellung der Drehkondensatoren erfolgte durch Schnurläufe, die des Kohlrauschkondensators durch einen auf die Mikrometerschraube aufgekitteten Glasstab, so daß eine Annäherung des Körpers an die Meßanordnung während der Messung vermieden wurde. Der Strom wurde, soweit nötig, durch einen Hitzdraht mit aufgelötetem Thermoelement gemessen. Die Koppelung mit dem Indikatorkreis erfolgte durch zwei Drahtwindungen von 15 cm Durchmesser. Die untersuchten sowie die Vergleichsdrähte wurden in einer freien Länge von rund 84,5 cm verwendet. Diese war durch das zum Verkupfern benutzte Rohr bedingt und wurde für alle Drähte beibehalten. Die Drähte wurden auf Messingklötze ($4 \times 3 \times 0,6$ cm) aufgelötet und durch isoliertes Aufkleben der Klötze auf eine Holzleiste gespannt. Das Verlöten erwies sich als einfachste, immer wieder in gleicher Güte herstellbare Verbindung. Von den Messingklötzchen führen kurze Kupferbügel in Quecksilbernäpfe, und außerdem waren auf ihnen noch „Potentialklemmen“ für die Gleichstrom-Widerstandsmessung mit dem Kompensationsapparat angebracht. Die Zusatzwiderstände bzw. ein Kurzschlußbügel wurden in der von E. Schott¹⁾ angegebenen Form ebenfalls in Quecksilbernäpfe eingelegt. Der gesamte Meßkreis war in länglicher Form in Paraffinklötzen auf einem Tisch befestigt. Hin- und Rückleitung waren etwa 90 cm voneinander entfernt. Die montierten

1) E. Schott, a. a. O.

Drähte wurden nacheinander unmittelbar in die Endnäpfe eingelegt. Mit dem für die Untersuchung der metallischen Mäntel als Vergleichsdraht benutzten 0,2 cm starken Kupferdraht und Kurzschlußbügeln an Stelle von R und I ergab der Meßkreis ein Dekrement von 0,009 für $\lambda = 500$ m.

Indikatorkreis.

Als Schwingungsanzeiger wurde ein hochempfindliches Thermokreuz im Vakuum benutzt, das durch 3 Windungen eines 0,2 cm starken Kupferdrahtes von 15 cm Durchmesser an den Meßkreis gekoppelt war. Die erzeugte Thermokraft wurde an einem Widerstand von 0,1 Ohm kompensiert. Das möglichst wenig träge Thermokreuz ergab mit einem Drehspul-Spiegelgalvanometer von Siemens & Halske (Schwingungsdauer 2,5 Sek.) rasche Einstellung. Als Regulierwiderstand für den Kompensationsstrom wurde ein Präzisionskurbelwiderstand von Siemens & Halske eingeschaltet. Durchweg mußten zur Kompensation einem 2 Volt-Akkumulator etwa 500 Ohm vorgeschaltet werden. Die genaue Abgleichung wurde dadurch geprüft, daß durch eine Doppelwippe der Kompensationsstrom und die Thermokraft gleichzeitig umgepolt wurden. Da die Raumverhältnisse ziemlich lange Galvanometerzuleitungen bedingten, traten bei den kürzeren Wellen Störungen durch vom Sender auf die Zuleitungen bewirkte Induktion ein. Diese wurde in bekannter Weise durch Vorschaltdrossel und Parallelkondensator von Thermokreuz ferngehalten. Die Koppelung zwischen Meßkreis und Indikatorkreis konnte durch Verschieben der Indikaterspule in weiten Grenzen geregelt werden und wurde auf annähernd gleichbleibende Thermokraft eingestellt.

Die Vergleichswiderstände.

Über bei Hochfrequenzmessungen anzuwendende hautwirkungsfreie Widerstände hat E. Schott in seiner bereits zitierten Arbeit eingehende Betrachtungen angestellt. Für die vorliegenden Untersuchungen wurde ein Satz konstanter Einzelwiderstände nach Art der von Schott zur Eichung seines kontinuierlich veränderlichen Widerstandes benutzten angefertigt. Die Bügel wurden mit einem Feußnerschen Kompensationsapparat bei Gleichstrom gemessen, so daß die Widerstandszunahme gegenüber einem Kurzschlußbügel genau bekannt war. Zur Kontrolle wurden die Widerstände unter

sich mit Hochfrequenzstrom verglichen. Es wurde dadurch die ausreichende Genauigkeit der Gleichstrommessung bestätigt.

Eine bedauerliche Einschränkung der Messungen wird durch die geringe Belastbarkeit der dünnadrächtigen Widerstände nötig. Sie verhindert vor allem die bei ferromagnetischem Material interessanten Messungen mit erheblich verschiedener Stromstärke, da diese auch nach unten hin durch die Meßgenauigkeit bald begrenzt wird.

Das Galvanisieren.

Elektroden und Rührvorrichtungen (Figg. 2 u. 3).

Hier war die Aufgabe, die zu prüfenden Drähte in gestreckter Form mit einer sehr gleichmäßigen Metallschicht zu bedecken. Gestreckt sollten die Drähte bleiben, damit nicht vor dem Einbringen in den Meßkreis eine Behandlung durch Biegung oder dergl. nötig wurde, die möglicherweise die Beschaffenheit des Niederschlages beeinflussen konnte. Die Technik bietet eine große Zahl von Rezepten für die Bäder, doch waren diese nicht ohne Auswahl und noch weniger die Arbeitsmethoden ohne weiteres brauchbar. Am einfachsten schien die Aufgabe

zu lösen, wenn der Draht zentral durch ein Metallrohr gespannt wurde, das gleichzeitig als Anode und als Badbehälter diente. Das Rohr wurde unten durch eine Kappe mit Schlauchansatz, beide aus dem Anodenmetall, verschlossen. Innen war an der Kappe zentral und isoliert eine kleine Klemme zur Befestigung des zu behandelnden Drahtes angebracht. Oben wurde auf das Rohr eine Kappe aus Fiber aufgeschoben, durch die



Fig. 2.

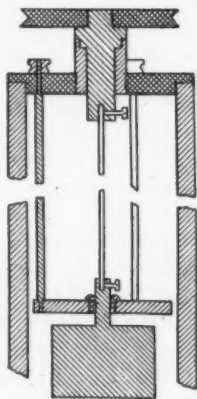


Fig. 3.

mit guter Führung eine Messingstange mit Klemmschraube zur Befestigung des oberen Drahtendes zentral durchgeführt werden konnte. Der Draht wurde nach der Vorbehandlung (vgl. unten)

in den Klemmen befestigt und in das Rohr eingeführt, bis die untere Kappe fest aufsaß. Dann wurde über die herausragende Messingstange die obere Kappe bis auf das Rohr geschoben und die Stange nach leichtem Anspannen des Drahtes mit einer seitlichen Schraube in der Führung festgeklemt. Die untere Kappe wurde mit sogenanntem „Bergmannkitt“ abgedichtet. Dieser wurde im Gegensatz zu Siegellack von den zum Teil laugenhaltigen Bädern nicht angegriffen. Es mußte großer Wert auf zentrale Führung des Drahtes durch das Rohr gelegt werden, da bei den geringen, durch das Rohrmaterial bedingten Elektrodenabständen schon kleine Abweichungen von der genau zentralen Lage erhebliche Unterschiede in der Stromdichte bringen mußten, und von dieser hängt bekanntlich die Niederschlagsmenge an der betreffenden Stelle ab.

Einige Schwierigkeiten bot auch das Rühren des Bades. Bei längerer Dauer des Prozesses besteht die Gefahr, daß durch Bildung verschieden stark konzentrierter Schichten des Elektrolyten sich wieder Stromdichtenunterschiede einstellen. Daher ist häufiges, am besten dauerndes Rühren des Bades geboten. Einblasen von Luft von unten her war nicht tunlich, weil dadurch — wenigstens beim Verkupfern — offensichtlich der Niederschlag beeinflußt wurde. Ebenso wenig war Kohlensäure anwendbar. Die Wirkung einer rasch umlaufenden Rührschraube drang in dem etwa 1 m langen Rohr nicht bis unten durch. Auch konnte ein genügend langer Rührstab nicht eingeführt werden, weil dadurch teilweise die Kathode gegen die Anode abgedeckt worden wäre. Wenn die Stromlinien sich auch stark um solche Hindernisse herumbeugen, so bestand doch bei dem geringen Elektrodenabstand die Möglichkeit einer Ungleichmäßigkeit des Niederschlages. Als einwandfrei erwies sich schließlich ein Durchpumpen des Elektrolyten durch das Rohr vermittelt einer kleinen Kolbensaugpumpe. Diese wurde durch einen Schlauch an den Ansatz der unteren Kappe gelegt und das geförderte Bad durch eine Bohrung in der oberen Kappe zurückgeleitet. Eine zweite Bohrung diente der Kontrolle des Badstandes im Rohr. Die Pumpe wurde durch einen Elektromotor mit geeignetem Vorgelege zur Verminderung der Umdrehungszahl betrieben, so daß sie in der Minute etwa 60 Hübe machte.

Während das Verkupfern in verschiedenen Bädern mit

dieser Einrichtung gut gelang, versagte sie bei den Eisen- und Zinkniederschlägen. Es ist möglich, daß hier kein geeignetes Rohrmaterial für die Anoden zur Verfügung stand. Da es schwierig war, Rohre von verschiedener Materialbeschaffenheit in den geeigneten Dimensionen zu erhalten, wurde eine andere Einrichtung getroffen, die das Anodenmetall in der leichter zu beschaffenden Stabform enthielt. Drei etwa 90 cm lange Stäbe des betreffenden Metalles wurden einerseits in eine runde Platte aus gleichem Metall geschraubt und andererseits durch den aus Isoliermaterial hergestellten Deckel eines als Badbehälter dienenden etwa 100 cm hohen Glaszylinders von 5 cm lichter Weite geführt und durch Muttern gehalten. Durch den Deckel war in einer Messingbuchse eine ebenfalls aus Messing gefertigte Achse geführt, die oben eine Scheibe für einen Schnurlauf trug und unten eine zentrale Bohrung mit seitlicher Klemmschraube zur Befestigung des zu galvanisierenden Drahtes hatte. Unten wurde an den Draht ein etwa 1 kg schweres zylindrisches Gewicht aus Zink von 4 cm Durchmesser gehängt, das mit einem 0,5 cm starken Hals zentral durch die untere Platte des Anodengestells ragte und oberhalb dieser mit einer Klemmschraube an dem Draht befestigt wurde. Der Hals wurde von der Platte durch eine Bernsteinbuchse isoliert, in der er sich so leicht drehte, daß eine Verdrehung des Drahtes nicht eintrat, wenn das gesamte Kathodensystem durch einen Schnurlauf in langsame Rotation versetzt wurde. Durch das Gewicht wurde ein Schlendern des in gut gestrecktem Zustande in das Bad gebrachten Drahtes bei der Drehung verhindert, so daß der gleichmäßige Anodenabstand gewahrt blieb. Der Strom wurde der Anode an den oberen Stabenden zugeführt und an der oberen Achse des Kathodensystems durch eine Schleiffeder abgenommen. Zu beachten war noch, daß der Hals des Gewichtes so lang sein mußte, daß das untere Ende des Drahtes weiter von der Anodenplatte als von den Anodenstäben entfernt war, damit hier nicht durch geringeren Elektrodenabstand nach der Platte zu größere Stromdichte eintrat.

Mit dieser Vorrichtung wurden einwandfreie, wiederholt verstärkte Eisenniederschläge erzeugt. Die Zinkniederschläge blieben stark körnig und ungleichmäßig. Infolge Zeitmangels mußten die Versuche, durch Änderung der Bäder oder des

Anodenmaterials bessere Ergebnisse zu erzielen, leider aufgegeben werden.

Dekapierung.

Besonders wichtig ist beim Galvanisieren bekanntlich die sorgfältige Reinigung (Dekapierung) der Kathoden. Die Drähte wurden zunächst mit Äther oder Alkohol sauber entfettet. Eine Probe für den Erfolg dieser Behandlung ist die augenblickliche gleichmäßige Benetzung durch Wasser ohne Inselbildung. Dann wurden die Drähte mit feinstem Schmirgel und einem Brei aus Wiener Kalk metallblank gemacht, abgespült und mit Fließpapier sorgfältig getrocknet. Unter Vermeidung jeder Berührung mit ungeschützten Fingern wurden die erforderlichen Wägungen vorgenommen, die Drähte nochmals leicht mit Kalk abgerieben und nach gutem Abspülen schnell in das Bad gebracht. Fehlgalvanisierungen durch mangelhafte Dekapierung waren auf diese Weise nicht zu verzeichnen.

Die Anoden müssen selbstverständlich ebenfalls gut sauber sein. Dies wurde durch Entfetten, Beizen mit geeigneter Säure und Scheuern mit Schmirgel leicht erreicht.

Bäder.

Es wurden Versuche mit einer ganzen Reihe von Bädern gemacht. Gute Niederschläge aus einfachen Salzlösungen zu gewinnen, gelingt kaum. Die Metalle werden in festhaftender, dichter Form durchweg nur durch sekundäre Prozesse aus komplexen Salzen gewonnen. Die Zusammensetzung des Bades übt einen großen Einfluß auf Farbe und Korn des Niederschlages aus. Auch ergaben sich Anhaltspunkte für eine Einwirkung auf die Leitfähigkeit, die aber angesichts der für solche Erwägungen zu großen Unsicherheiten der Untersuchungsmethode bestimmte Schlüsse nicht zulassen. Die in den Bädern verwendeten Chemikalien waren von üblicher Reinheit. Es wurden folgende Zusammensetzungen verwandt:

Kupferbäder.

a) Alkalisches Kupferbad nach Weil.¹⁾ Zu 1 Liter Bad sind erforderlich: 35 g krist. Kupfersulfat, 150 g Seignettesalz (Kalium-Natriumtartrat), 80 g Ätznatron. Ätznatron und

1) Muspratts Handbuch d. Chemie, Artikel „Kupfer“.

Seignettesalz werden für sich gelöst und zur Kupfersulfatlösung gegossen. Es entsteht eine Flüssigkeit von lebhaft indigoblauer Farbe, die stark ätzend wirkt. Die etwa davon benetzten Hände schützt man durch Abspülen mit leichter Säure. Bei einer Stromdichte von $0,2 \text{ Amp/dcm}^2$ ergaben sich gute Niederschläge, doch wurde das Bad — wahrscheinlich durch Einwirkung der atmosphärischen Kohlensäure — rasch unzuverlässig. Daher wurde später neben einem sauren Kupferbad ausschließlich ein cyankalisches verwendet, das bei einiger Vorsicht, vor allem beim Ansetzen, durchaus nicht unangenehm in der Handhabung ist. Übrigens wurde anfänglich ein vom Glaswerk Schott & Gen. gütigst überlassenes Bad von einer dem Weilschen Bad ähnlichen Zusammensetzung benutzt.

b) Cyankalisches Kupferbad.¹⁾ Zu 1 Liter Bad sind erforderlich: 20 g Kupferacetat, 25 g neutrales schwefligsaures Natron, 17 g kristallisierte Soda, 20 g Cyankalium von 98 bis 100 Proz. Gehalt an Cyankalium. Das essigsäure Kupfer wird in 0,5 Liter, das schwefligsaure und kohlen saure Natron in 0,25 Liter und das Cyankalium in 0,1 Liter Wasser gelöst. Die Natronlösung wird zur Kupferlösung gegossen, wodurch sich ein dicker grüner Niederschlag bildet. Dieser löst sich nach Hinzufügen des Cyankaliums völlig, und es entsteht ein klares, farbloses oder leicht gelbliches Bad, das auf 1 Liter aufzufüllen ist. Eine bläuliche Färbung deutet auf zu geringen Gehalt an Cyankalium und entsteht oft während des Gebrauchs. Sie ist durch vorsichtigen Zusatz von Cyankalium aufzuheben. Das Bad gibt bei einer Stromdichte von $0,3 \text{ Amp/dcm}^2$ festhaftende, matt hellrote Niederschläge und darf keine wesentliche Gasbildung zeigen. Diese ist meist auf zu großen Überschuß an Cyankali zurückzuführen, der durch Kupfercyanür abgesättigt wird. Bei Innehaltung der angegebenen Mischungsfolge ist keine Entwicklung von Blausäure zu befürchten, doch ist natürlich ein Ansetzen des Bades unter dem Abzug oder im Freien zu empfehlen.

c) Saures Kupferbad.²⁾ Zu 1 Liter Bad sind erforderlich: 200 g kristallisiertes Kupfersulfat, 30 g konzentrierte

1) H. Steinach u. G. Buchner, Die galvanischen Metallniederschläge. Verlag von M. Krayn, Berlin.

2) H. Steinach u. G. Buchner, a. a. O.

Schwefelsäure. Bei einer Stromdichte von $0,5 \text{ Amp./cm}^2$ ergibt sich ein tadelloser, matter Niederschlag von heller, fleischroter Farbe. Er hat dichtes Korn und zeigt nach leichtem Abreiben mit Wiener Kalk die bekannte schöne Kupferfarbe. Es können ohne Schaden auch größere Stromdichten angewendet werden. Das Bad ist wegen der sofort eintretenden sogenannten Kontaktverkupferung nicht brauchbar zur Galvanisierung von Eisen. Der Kontaktniederschlag blättert nämlich schon bei dünnen Schichten ab. Daher wurden die Eisendrähte zunächst im cyankalischen Bad gedeckt und dann im schneller arbeitenden und leichter zu behandelnden sauren Bad weiter verkupfert.

Eisenbad.

Neben den bekannten, aus Eisensulfat und Salmiak in verschiedenem Mengenverhältnis zusammengesetzten Bädern gab das nachstehend aufgeführte und für die Untersuchungen benutzte Bad die besten Niederschläge.¹⁾ Zu 1 Liter Bad sind erforderlich: 125 g reines kristallisiertes Eisensulfat (oxydul), 140 g Magnesiumsulfat. Stromdichte $0,05 \text{ Amp./cm}^2$. Das Bad darf blaues Lackmuspapier höchstens schwach violett färben. Bei zu starkem Säuregehalt, der im Gebrauch eintritt, ist mit kohlensaurer Magnesia zu neutralisieren. Diese kann ohne Schaden im Überschuß vorhanden sein. Mit dem Bad wurden gute, taubengraue Niederschläge von feinem Korn und schönem, atlasartigen Glanz erzielt. Die befürchtete schnelle Oxydation trat nicht ein. Es scheint die Wirkung der Eisenbäder sehr von den Anoden abzuhängen. Bei den vorliegenden Untersuchungen wurde sogenanntes Schraubenweicheisen in Stabform benutzt. Ein gezogenes Eisenrohr gab in der anderen geschilderten Anordnung keine befriedigenden Ergebnisse.

Zinkbad.

Bei den im Kleinen ausgeführten Vorversuchen ergab das unten angeführte Bad gute, einfache Überzüge. Wiederholte Niederschläge gelangen jedoch mit beiden geschilderten Vorrichtungen nicht. Zu 1 Liter Bad sind erforderlich²⁾: 150 g Zinksulfat, 50 g Ammoniumsulfat, 10 g Borsäure. Strom-

1) H. Steinach u. G. Buchner, a. a. O.

2) W. Pfanhauser, Die elektrolytischen Metallniederschläge. Verlag von Springer, Berlin.

dicke 0,5—1 Amp/dcm². Das Bad muß ohne großen Säureüberschuß stets sauer reagieren.

Bestimmung der Mantelstärke.

Bei den in Frage kommenden dünnen Schichten reichte natürlich die Genauigkeit der einfachen mechanischen Meßinstrumente wie Mikrometerschraube usw. nicht aus. Auch führten optische Messungen nicht zum Ziel. Als bestes Hilfsmittel erwies sich die Wage. Die Stärke des Drahtes wurde aus Länge, Gewicht und spez. Gewicht bestimmt. Das spez. Gewicht wurde aus Proben, die verschiedenen Stellen des Drahtmaterials entnommen waren, mit dem Pyknometer festgestellt. Es ergab sich dabei gute Übereinstimmung, so daß mit ausreichender Homogenität des Drahtmaterials gerechnet werden kann. Bei der Bestimmung der Mantelstärke liegt nahe, die ausgeschiedenen Metallmengen einfach nach dem Faradayschen Gesetz zu berechnen. Hierzu ist jedoch zu bemerken, daß bei den zusammengesetzten Bädern nicht allein das Metall, sondern häufig auch geringe Gasmengen an der Kathode abgeschieden werden. Die Stromausbeute ist in bezug auf das Metall nicht 100 Proz. Überdies war es nötig, die beim wiederholten Galvanisieren durch die stets erforderliche Reinigung des Drahtes entstehenden Verluste an Mantelmetall zu bestimmen.

Die Wägung der etwa 85 cm langen Drähte in gestrecktem Zustande wurde folgendermaßen ausgeführt: An einer empfindlichen Wage wurde die durch die Grundplatte des Gehäuses hindurchgeführte Schalenarretierung der einen Seite abgenommen. An der Schale wurde eine durch das freigewordene Loch hindurchreichende Klemme aufgehängt, in der der zu wiegende Draht befestigt wurde und so frei unter der auf einem Tisch und einem festen Stativ aufgestellten Wage herabhing. Die Balken- und Endschnidenarretierung wurde durch die Änderung nicht berührt.

Theoretisches.

Die Formel von J. M. Miller.¹⁾

Zur Theorie der untersuchten Widerstände soll nur kurz die in der Einleitung erwähnte Formel von J. M. Miller betrachtet werden, die zwar, wie sich später zeigen wird, den

1) Vgl. die Fußnote zur Einleitung.

vorliegenden Verhältnissen nicht genau entspricht, aber doch zu weiteren Schlüssen Anlaß gibt.

Miller faßt Seele und Mantel als zwei parallelgeschaltete Leiter auf. Für die Seele wird konstante Permeabilität (Anfangspermeabilität), für den Mantel die Permeabilität 1 angenommen. Bei Berechnung von Widerstand und Selbstinduktion der Seele wird die Hautwirkung in Betracht gezogen, für den dünnen Mantel wird sie als klein nicht in Ansatz gebracht. Die Rechnung wird für einen aus Seele und Mantel zusammengesetzt gedachten Kupferdraht durchgeführt und ergibt für den Widerstand bei 5000 Perioden einen Fehler von $-1,1$ Proz. gegenüber der unmittelbaren Rechnung (Radius der gedachten Seele $0,2231$ cm, äußerer Radius $0,2607$ cm). Den Fehler schiebt Miller der nicht berücksichtigten Hautwirkung im Mantel zu. Für hohe Frequenzen ist ein Versagen der Formel für gutleitende Mäntel schon bei sehr geringer Mantelstärke zu erwarten, während z. B. für Elektrolyte die Vernachlässigung der ungleichen Stromverteilung über den Mantelquerschnitt noch zulässig erscheint.

Die magnetischen Felder von Seele und Mantel werden getrennt betrachtet, so daß sich die gesamte innere Induktion eines bimetalischen Drahtes in folgende Teile zerlegen läßt:

Induktions- wirkung	a) des vom Seelenstrom verursachten Flusses in der Seele	} auf die Seele,
	b) des vom Seelenstrom verursachten Flusses im Mantel	
	c) des vom Mantelstrom verursachten Flusses im Mantel	} auf den Mantel.
	d) des vom Mantelstrom verursachten Flusses im Mantel	
	e) des vom Seelenstrom verursachten Flusses im Mantel	

Die einzelnen Wirkungen lassen sich als Selbst- und gegenseitige Induktion bezeichnen:

$a + b = L_1' + L_1'' = L_1 =$ Selbstinduktion der Seele.

$c = M_{21}$ Gegenseitige Induktion des Mantels auf die Seele.

$d = L_2 =$ Selbstinduktion des Mantels.

$e = M_{21} =$ Gegenseitige Induktion der Seele auf den Mantel.

Weiter soll sein:

r_1 = Radius der Seele, r_2 = äußerer Radius des Mantels,
 μ = Permeabilität der Seele, l = Permeabilität des Mantels.

Dann wird nach bekannten Formeln:

$$L_1 = \frac{\mu}{2} + 2 \operatorname{Log} \frac{r_2}{r_1}; \quad M_{12} = M_{21} = 1 - \frac{2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \operatorname{Log} \frac{r_2}{r_1},$$

$$L_2 = \frac{1}{2} - \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left(1 - \frac{2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \operatorname{Log} \frac{r_2}{r_1} \right).$$

Diese Ausdrücke gelten für gleichförmige Stromverteilung über die Leiterquerschnitte, d. h. also für die Frequenz 0. Da bei höherer Frequenz eine Hautwirkung nur für die Seele angenommen wird, ändern sich nur R_1 und L_1' mit der Frequenz. Sie sind nach den Rayleighschen Formeln leicht zu berechnen. Besonders erleichtert wird diese Rechnung durch die von Zenneck¹⁾ gezeichneten Kurven.

Aus der Annahme der parallelgeschalteten Leiter ergibt sich dann schließlich Widerstand und Selbstinduktion als:

$$R = \frac{[R_1 R_2 - \omega^2 (L_1 L_2 - M^2)](R_1 + R_2) + \omega^2 (R_1 L_2 + R_2 L_1)(L_1 + L_2 - 2M)}{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2 (L_1 + L_2 - 2M)^2},$$

$$L = \frac{(R_1 L_2 + R_2 L_1)(R_1 + R_2) - [R_1 R_2 - \omega^2 (L_1 L_2 - M^2)](L_1 + L_2 - 2M)}{(R_1 + R_2)^2 + \omega^2 (L_1 + L_2 - 2M)^2}.$$

Ergebnisse.

Die Ergebnisse der Untersuchungen sind in den beigefügten Tabellen und Kurven zusammengefaßt. Sie sind natürlich beeinflußt von verschiedenen der gerade bei Hochfrequenzmessungen so zahlreichen Fehlerquellen. So werden Frequenz- und Intensitätsschwankungen trotz größter Sorgfalt des Aufbaues nicht ganz zu vermeiden gewesen sein, wenn sie auch in keiner Weise merklich in Erscheinung getreten sind. Als viel störender sind jedenfalls die Fehler in der Bestimmung der Mantelstärke sowie die Einflüsse von Temperaturschwankungen anzusprechen. Erstere müssen eine notwendige Folge der vielfachen Behandlung der Drähte sein, letztere sind wegen der Unzulässigkeit von Bädern nicht zu unterdrücken und auch nicht genau zu definieren.

1) J. Zenneck, Ann. d. Phys. 11. S. 1135. 1903.

Bei den Versuchen mit metallischen Mänteln stellt sich noch ein unvermeidbarer Mangel dadurch ein, daß durch das Aufbringen der Metallschichten allmählich die Bedingungen für die Hautwirkungen durch die zunehmende Stärke des Drahtes andere werden. Störungen des Gesamtbildes sind jedoch hierdurch nicht zu erwarten, da diese Verstärkung im Höchstfalle nur bis auf rund 7 Proz. des ursprünglichen Durchmessers ansteigt.

Als Vergleichsdraht wurde in jedem Falle ein der Seele des Manteldrahtes in den Dimensionen möglichst gleicher Kupferdraht genommen. Der Widerstand dieses Drahtes bei den verschiedenen Frequenzen wurde aus dem Gleichstromwert berechnet und mit den gemessenen Widerstandsdifferenzen zum Gesamtwiderstand kombiniert. Durch die Rechnung werden in das Ergebnis keine Fehler hineingebracht werden, die aus dem Rahmen der Gesamtgenauigkeit fallen. Die Durchmesser der verschiedenen Träger der Metallmäntel stimmte nur in dem bei technischen Drähten üblichen Maße miteinander überein. Es war nicht möglich, mit den vorhandenen Mitteln bessere Übereinstimmung zu erzielen. Zudem dürfte aber auch die Annäherung an den beabsichtigten Wert $2r = 0,2$ cm für den Vergleich der verschiedenen Meßreihen ausreichen. Die angegebenen Gleichstrom-Widerstandswerte für die Mäntel sind aus den Dimensionen und spezifischen Widerständen berechnet.

Insgesamt ist zu den angedeuteten Fehlerquellen zu bemerken, daß sie verhinderten, die von der Meßmethode an sich zu erwartende Genauigkeit voll auszunutzen. Es kann aber auch der einzelnen Messung angesichts der Gesamtaufgabe nur eine untergeordnete Bedeutung zukommen, und das Gesamtbild erscheint durch die Fehler nicht gestört.

Drähte mit elektrolytischen Mänteln.

(Tab. I und Fig. 4.)

Diese Untersuchungen haben nicht nur rein physikalische Bedeutung, denn elektrolytische oder andere Schichten geringer Leitfähigkeit, wie z. B. Oxyde, Ruß usw., werden sich häufig im Freien auf von Hochfrequenz durchströmten Leitern bilden. Für die vorliegenden Untersuchungen wurden Kupferdrähte, die zentral durch Glasröhren von verschiedener Weite

Tabelle I.

Kupferdrähte mit elektrolytischen Mänteln.
Vergleichsdraht: Kupferdraht von gleichen Dimensionen.
Wechselstromwiderstände: in Ohm pro m.

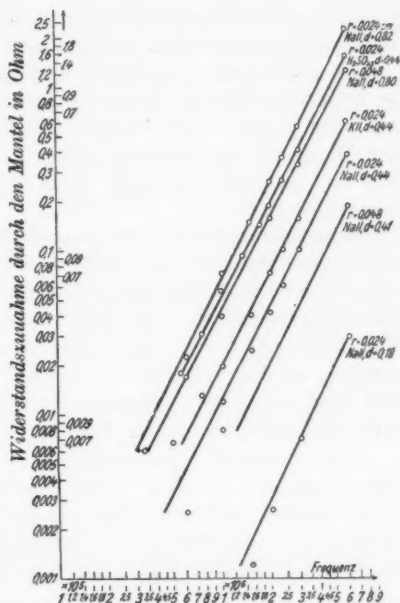
Wellenlänge	50	100	150	200	300	500	900
Drahtradius							
$r = 0,024$	0,418	0,304	0,252	0,222	0,185	0,147	0,115
$r = 0,025$	0,411	0,297	0,247	0,216	0,180	0,144	0,112
$r = 0,048$	0,203	0,146	0,1196	—	0,0863	0,0684	0,0524
Ergebnisse: (Widerstände in Ohm pro m)							
Gleichstrom- widerstand des Drahtes	0,0835	0,0835	0,0885	0,0885	0,0885	0,0221	0,0221
Drahtradius cm	0,025	0,025	0,024	0,024	0,024	0,048	0,048
Mantelstärke cm	0,44	0,44	0,82	0,44	0,18	0,41	0,80
Gleichstrom- widerstand des Mantels	197,5	540	207	670	3590	753	214
Elektrolyt	30 proz. H_2SO_4	20 proz. KCl	$NaCl$ konz.	desgl.	desgl.	desgl.	desgl.
Leitfähigkeit	0,764	0,275	0,216	0,225	0,225	0,202	0,206
ΔR pro m:							
$\lambda = 50$ m	1,547	0,616	2,284	0,385	0,030	0,188	1,262
100	0,421	0,158	0,575	0,103	0,007	0,041	0,333
125	0,269	0,102	0,367	0,062	—	—	—
150	0,191	0,073	0,263	0,042	0,0026	0,019	0,157
200	—	0,041	0,151	0,025	0,001	—	—
300	0,057	0,020	0,072	0,012	0,000	0,008	0,040
400	0,032	0,013	—	—	—	—	—
500	—	—	0,023	0,0025	—	—	0,017
530	0,018	—	—	—	—	—	—
600	—	0,007	—	—	—	—	—
900	—	—	0,006	0,000	—	—	0,006

geführt waren, mit Elektrolyten umgeben. Es wurden verhältnismäßig dünne Drähte untersucht, weil diese sich am besten einspannen ließen. Der innere Durchmesser der Glasröhren war trotz besonderer Auswahl ziemlich ungleichmäßig, so daß im Verhältnis dazu für die Messung des Drahtdurchmessers die Mikrometerschraube genügte. Die lichte Röhrenweite wurde durch Wasserfüllung bestimmt. Die Temperatur des Elektrolyten wurde durch Einführen eines Thermometer in den seitlich an das Rohr angeblasenen Füllansatz geprüft und bei Feststellung der Leitfähigkeit in Rechnung gesetzt.

Die Elektrolyte wurden durch Wägung bzw. Sättigung aus den betreffenden Säuren und Salzen hergestellt.¹⁾ Diese waren von üblicher Reinheit.

Die Versuche zeigen, daß bei kurzen Wellen und gutleitenden Elektrolyten in starker Schicht recht beträchtliche Widerstandserhöhungen durch den Mantel auftreten, die z.B. bei $\lambda = 50$ m durch einen 0,82 cm starken Mantel von konzentrierter Kochsalzlösung um 0,48 cm starken Kupferdraht auf 546 Proz. des ursprünglichen Drahtwiderstandes anstiegen. Dieselbe Lösung erzeugte auf demselben Draht bei gleicher Welle, jedoch als 0,44 cm starker Mantel 92 Proz. und als 0,18 cm starker Mantel 7,2 Proz. Widerstandszuwachs.

Hierbei war die Leitfähigkeit des ersten Mantels infolge von Temperaturänderung noch um rund 4 Proz. kleiner als bei den anderen. Die Erhöhung fällt also rasch mit der Mantelstärke ab. Ebenso nimmt sie mit der Leitfähigkeit stark ab. Bei 0,44 cm Mantel auf 0,048 cm starkem Draht zeigte sich eine Erhöhung des Drahtwiderstandes um 370 Proz. in 90 proz. Schwefelsäure, um 147 Proz. in 20prozentiger Kaliumchloridlösung und um 92 Proz. in konzentrierter Kochsalzlösung. Die entsprechenden Leitfähigkeiten waren dabei 0,764, 0,275 und 0,225. Es wurde wegen der wenigen für jeden Fall gemessenen Punkte



Kupferdrähte mit elektrolyt. Mantel.

Fig. 4.

1) Kohlrausch-Holborn, Leitvermögen der Elektrolyte.

darauf verzichtet, Kurven der Abhängigkeit des Widerstandes von der Mantelstärke oder Leitfähigkeit aufzustellen. In bezug auf die Wellenlänge zeigen die beigefügten Kurven sehr angenähert ein umgekehrt proportionales Verhältnis der Widerstandserhöhung zu dem Quadrat der Wellenlänge (Fig. 4).

Im Verhältnis zu dem hohen Widerstand des Elektrolyten ist in jedem Falle die Widerstandserhöhung durch den Mantel nur sehr gering. Das besagt, daß dem Draht nach wie vor der Hauptteil der Leitung zufällt und nur eine geringe Erhöhung der Hautwirkung trotz erheblicher Querschnittsvermehrung eintritt.

Eine Verdoppelung des Drahtdurchmessers bei wenig verminderter Mantelstärke bringt bedeutende Abnahme des Widerstandszuwachses mit sich und zwar besonders bei den höheren Frequenzen. Es ging damit jedoch eine erhebliche Verminderung der Leitfähigkeit durch Temperaturabnahme parallel, so daß Schlüsse aus diesem Verhalten angesichts der sich nur auf zwei Meßreihen erstreckenden Beobachtungen schwerlich gezogen werden können.

Die Versuche legen den Schluß nahe, daß die Technik von derartigen Mänteln einen schädlichen Einfluß auf die Widerstandsverhältnisse ihrer Drähte nur bei sehr kurzen Wellen zu befürchten hat. Die zufällig sich bildenden Mäntel werden bei weitem nicht die oben in Betracht gezogenen

Erläuterung zu Mantel und Draht	$\lambda = 50 \text{ m}$		$\lambda = 100 \text{ m}$		$\lambda = 150 \text{ m}$		$\lambda = 300 \text{ m}$	
	<i>R</i> ber.	<i>R</i> gem.	<i>R</i> ber.	<i>R</i> gem.	<i>R</i> ber.	<i>R</i> gem.	<i>R</i> ber.	<i>R</i> gem.
Mantel: NaCl; Ltf. 0,216; $r_2 = 0,844 \text{ cm}$								
Draht: Cu; $r_1 = 0,024$; $R = 00885 \text{ Ohm/m}$	3,038	2,702	0,977	0,879	0,532	0,515	0,263	0,257
Mantel: NaCl; Ltf. 0,225; $r_2 = 0,46 \text{ cm}$								
Draht: wie oben	0,952	0,803	0,440	0,407	0,328	0,294	0,201	0,197
Mantel: NaCl; Ltf. 0,225; $r_2 = 0,200 \text{ cm}$								
Draht: wie oben	0,465	0,448	0,316	0,319	0,260	0,255	0,187	0,185
Mantel: H_2SO_4 ; Ltf. 0,764; $r_2 = 0,46 \text{ cm}$								
Draht: Cu; $r_1 = 0,025 \text{ cm}$; $R = 0,0835 \text{ Ohm/m}$	2,149	1,958	0,743	0,718	0,448	0,438	0,232	0,237

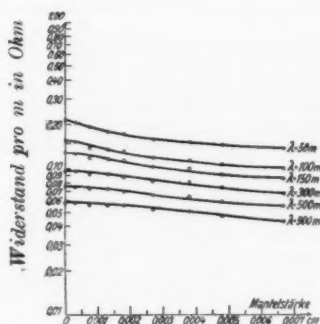
günstigen Leitfähigkeiten erreichen. Auch werden sie nur selten und dann nur bei sehr geringer Leitfähigkeit (Eis, Rauhreif) erhebliche Stärke haben.

Ein auffallendes Ergebnis zeigte ein Vergleich der gemessenen Werte mit den aus der Millerschen Formel berechneten. Die gemessenen Werte sind besonders bei ganz kurzen Wellen erheblich kleiner als die berechneten.

Drähte mit metallischen Mänteln.

Messingdraht mit Kupfermantel (Tab. II, Fig. 5).

Das Kupfer wurde auf einen von den Zeisswerken bezogenen Messingdraht niedergeschlagen. Die stufenweise Verstärkung wurde jedoch nicht soweit getrieben, bis der Strom lediglich im Kupfer geflossen wäre. Dadurch würde nämlich



Verkupfelter Messingdraht $r = 0,1004$ cm. Fig. 5.

der Gesamtdurchmesser des bemantelten Drahtes so stark zugenommen haben, daß die Bedingungen für die Hautwirkung gegenüber dem Anfangszustand merklich andere geworden wären.

Die Tabelle und Kurven zeigen, wie das Kupfer mit zunehmender Manteldicke die Leitung übernimmt, und zwar natürlich um so schneller, je höher die Frequenz ist. Die Punkte für 0,0007 cm Mantelstärke fallen merklich unter den Kurvenverlauf. Es muß bei ihnen ein nicht zu ermittelnder

Tabelle II.

Verkupfelter Messingdraht.

Versuchsdraht: $r = 0,1004$ cm, Gleichstromwiderstand: $0,0239$ Ohm/m.Vergleichsdraht: Kupferdraht, $r = 0,1025$ cm, Gleichstromwiderstand: $0,00568$ Ohm/m.

Wellenlänge	50	100	150	300	500	900	1800
Wechselstrom- widerstand Ohm/m	0,109	0,076	0,062	0,048	0,036	0,027	0,0191

Ergebnisse.

Bad	Seignettesalzbad								
Mantelstärke cm	0	0,0003	0,0007	0,0013	0,0018	0,0077	0,0038	0,0048	0,0067
Gleichstrom- widerstand des Mantels Ohm/m	—	0,8966	0,3884	0,2069	0,1456	0,0976	0,0691	0,0546	0,0396
ΔR pro m:									
$\lambda = 50$ m	0,1060	0,0959	0,0815	0,0703	0,0651	0,0510	0,0459	0,0370	0,0330
100	0,0789	0,0756	0,0630	0,0605	0,0559	0,0446	0,0402	0,0341	0,0290
150	0,0657	0,0649	0,0567	0,0552	0,0509	0,0415	0,0386	0,0314	0,0260
300	0,0488	0,0476	0,0441	0,0436	0,0402	0,0353	0,0328	0,0278	0,0224
500	0,0401	0,0391	0,0365	0,0375 ?	0,0335	0,0310	0,0289	0,0249	0,0210
900	0,0310	0,0308	0,0288	0,0301 ?	0,0278	0,0259	0,0241	0,0214	0,0183
R pro m:									
$\lambda = 50$ m	0,215	0,205	0,191	0,179	0,174	0,160	0,155	0,146	0,142
100	0,155	0,152	0,139	0,136	0,132	0,121	0,116	0,110	0,105
150	0,128	0,127	0,119	0,117	0,113	0,104	0,101	0,093	0,088
300	0,097	0,096	0,092	0,092	0,088	0,083	0,081	0,076	0,070
500	0,076	0,075	0,073	0,073 ?	0,070	0,067	0,065	0,061	0,057
900	0,058	0,058	0,056	0,056 ?	0,056	0,053	0,051	0,048	0,045

Meßfehler vorliegen. Im allgemeinen ist der Verlauf der Kurven im Anfang überhaupt nicht eindeutig, so daß die in dem gezeichneten Verlauf vorhandenen Wendepunkte unsicher sind.

Die aus der Millerschen Formel sich ergebenden Widerstandswerte liegen schon für $0,0007$ cm Mantelstärke erheblich unter den gemessenen. Es ist daraus zu entnehmen, daß schon bei diesen sehr dünnen Mänteln eine erhebliche Ungleichförmigkeit der Stromverteilung im Mantel eintritt und die Formel für Hochfrequenz auch für sehr geringe Mantelstärken nicht mehr brauchbar ist.

Eisen- und Stahldraht mit Kupfermantel.
(Tabb. III und IV, Figg. 6 und 7 auf der folgenden Seite.)

Als Seelenmaterial wurde sogenanntes „Schraubenweicheisen“, ein gutes und in genügend präziser Stabform lieferbares weiches Eisen, und ein guter Werkzeugstahl von angenähert $2r = 0,2$ cm benutzt. Es vollzog sich die Untersuchung in den früher geschilderten Bahnen, nur mußte die zur Messung benutzte Stromstärke festgelegt werden.¹⁾ Wegen der dünnadrätigen Vergleichswiderstände wurde der Strom nur auf 0,19 Amp. bemessen.

Tabelle III.

Verkupfter Eisendraht.Versuchsdraht: $r = 0,09845$ cm, Gleichstromwiderstand: 0,0480 Ohm/m.

Vergleichsdraht: Vgl. Tab. II.

Strom im Meßkreis: 0,19 Amp.

Ergebnisse:

Bad	—	cyankal.	cyankal.	$\text{CuSO}_4 + \text{H}_2\text{SO}_4$			
Gleichstromwiderstand des Mantels Ohm/m	—	1,3388	0,4423	0,1512	0,0951	0,0595	0,044
Mantelstärke cm	0,060	0,000198	0,000619	0,001802	0,00285	0,00452	0,00609
R pro m:							
$\lambda = 50$ m	2,2294	1,7366	0,7667	0,1125	0,0357	— 0,0070	— 0,0107
100	1,6548	1,3506	0,6615	0,1476	0,0598	+ 0,0110	— 0,0040
150	1,3847	1,1383	0,6212	0,1582	0,0771	0,0188	0,0000
300	1,0204	0,8805	0,5572	0,1662	0,0925	0,0336	+ 0,0140
500	0,8155	0,7274	0,4940	0,1674	0,0980	0,0434	0,0204
900	0,6405	—	0,4299	0,1662	0,1017	0,0494	0,0207
1800	—	—	—	—	—	0,0560	0,0327
R pro m:							
$\lambda = 50$ m	2,338	1,846	0,876	0,222	0,145	0,102	0,092
100	1,731	1,427	0,738	0,224	0,135	0,087	0,072
150	1,447	1,200	0,683	0,220	0,139	0,081	0,062
300	1,068	0,929	0,605	0,214	0,141	0,082	0,062
500	0,852	0,763	0,530	0,203	0,134	0,079	0,056
900	0,668	—	0,457	0,193	0,129	0,076	0,054
1800	—	—	—	—	—	0,075	0,052

Die in den Kurven und Tabellen zusammengefaßten Meßergebnisse bestätigen den zu erwartenden starken Einfluß der Kupfermäntel auf die Widerstandsverhältnisse.

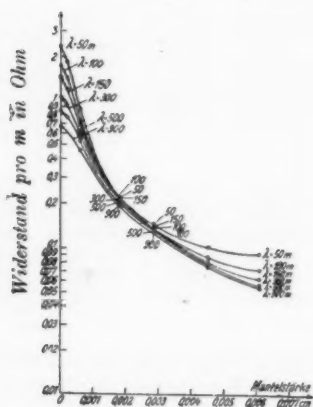
1) Vgl. u. a. Zickler, Elektrotechn. u. Maschinenbau 40. S. 449. 1919.

Tabelle IV.
Verkupfter Stahdraht.

Versuchsdraht: $r = 0,0998$ cm, Gleichstromwiderstand: 0,0616 Ohm/m.
Vergleichsdraht: Vgl. Tab. II.
Strom im Meßkreis: 0,19 Amp.

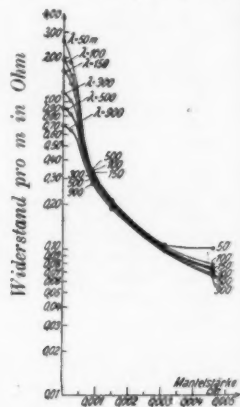
Ergebnisse:

Bad	—	cyankal.	CuSO ₄ + H ₂ SO ₄			
Gleichstromwiderstand des Mantels Ohm/m	—	1,186	0,3036	0,1750	0,0876	0,0571
Mantelstärke cm	0,000	0,00023	0,0009	0,0015	0,0031	0,0046
ΔR pro m:						
$\lambda = 50$ m	2,5089	1,7426	0,2302	0,1019	0,0000	- 0,0053
100	1,8626	1,4408	0,2591	0,1385	0,0306	+ 0,0047
150	1,5563	1,2698	0,2677	0,1479	0,0400	0,0144
300	1,1114	0,9693	0,2676	0,1569	0,0560	0,0259
500	0,8701	0,7924	0,2643	0,1643	0,0640	0,0335
900	0,6628	0,6193	0,2501	0,1630	0,0716	0,0413
1800	—	—	—	—	0,0770	0,0453
R pro m: $\lambda = 50$ m	2,618	1,852	0,339	0,214	0,109	0,104
100	1,939	1,517	0,335	0,215	0,107	0,081
150	1,618	1,332	0,330	0,210	0,102	0,076
300	1,159	1,017	0,316	0,205	0,104	0,074
500	0,906	0,828	0,300	0,200	0,100	0,070
900	0,690	0,646	0,277	0,190	0,099	0,068
1800	—	—	—	—	0,097	0,052



Verkupfter Eisendraht
 $r = 0,0985$ cm.

Fig. 6.



Verkupfter Stahdraht
 $r = 0,0998$ cm.

Fig. 7.

Charakteristisch für die ganze Erscheinung ist das starke Zusammenlaufen der für die verschiedenen Wellenlängen gezeichneten Widerstandskurven, und zwar ist eigentümlicher Weise das Zusammenlaufen der Kurven für Stahlseelen enger als für Eisenseelen. Nach diesen Ergebnissen liegt jedenfalls die Vermutung nahe, daß es durch geeignete „Bemantelung“ von Drähten mit passenden magnetischen Eigenschaften gelingen müßte, gute Leiter zu erzeugen, die für einen größeren Wellenbereich praktisch konstanten Widerstand haben, und deren Durchmesser sehr viel größer ist, als für „skineffekt-freie“ Drähte sonst zulässig ist.

Die Kurven geben übrigens auch noch eine Bestätigung dafür, daß die Widerstände von reinem Kupferdraht und verkupfertem Eisen- oder Stahldraht annähernd gleich werden, wenn bei genügend starkem Kupfermantel die Drähte gleichen Durchmesser haben. Dadurch kann natürlich viel Kupfer gespart werden. Der Vergleichskupferdraht hat bei 0,1025 cm Halbmesser für $\lambda = 50$ m einen Widerstand von 0,109 Ohm pro Meter. Derselbe Widerstand wird vom Eisen-draht bei einer Mantelstärke von 0,00405 cm auf einer Seele von 0,09845 cm Halbmesser, d. h. einem gesamten Halbmesser von 0,1025 cm, und vom Stahldraht bei einer Mantelstärke von 0,0031 cm auf einer Seele von 0,0998 cm Halbmesser, d. h. einem gesamten Halbmesser von 0,1029 cm erreicht. Diese Übereinstimmung dürfte innerhalb der Fehlergrenze liegen.

Kupferdraht mit Eisenmantel.
(Tab. V, Fig. 8 auf der folgenden Seite.)

Hier zeigt sich deutlich die zu erwartende starke Widerstandszunahme des Drahtes durch den Eisenmantel. Auffällig ist das sehr beträchtliche Auseinanderlaufen der für die verschiedenen Wellenlängen gezeichneten Kurven.

Zusammenfassung.

Es wird eine Meßmethode für die Bestimmung des Widerstandes gerader Leiter für Hochfrequenzströme durchgeführt, die letzten Endes auf die bekannte Methode der Messung von Gleichstromwiderständen durch Vertauschen des gesuchten Widerstandes mit einem bekannten zurückgeht. Die genauen Werte werden dabei aus zwei benachbarten interpoliert.

Tabelle V.

Vereisenter Kupferdraht.

Versuchsdraht: $r = 0,09776$ cm, Gleichstromwiderstand: 0,0066 Ohm/m.

Vergleichsdraht: Vgl. Tab. II.

Strom im Meßkreise: 0,19 Amp., in der letzten Spalte: 0,095 Amp.

Ergebnisse

Bad	Eisensulfat + Magnesiumsulfat + kohlensaure Magnesia						
Gleichstrom- widerstand des Mantels Ohm/m	—	6,49	3,571	2,484	1,527	1,053	1,053
Mantelstärke cm	0,000	0,00025	0,00045	0,00065	0,00106	0,00153	0,00153
ΔR pro m:							
$\lambda = 50$ m	—	0,1656	0,5385	1,6053	2,2762	2,7221	unsicher
100	—	0,0494	0,1702	0,2779	1,1050	2,1344	1,7799
300	—	0,0079	0,0230	0,0999	0,2352	0,5132	0,5051
500	—	0,0060	0,0115	0,0332	0,0987	0,2310	0,2140
900	—	0,0032	0,0050	0,0163	0,0359	0,0851	0,0845
1800	—	0,00095	0,0025	0,0044	0,0106	0,0226	—
R pro m:							
$\lambda = 50$ m	0,119	0,275	0,648	1,714	2,385	2,831	—
100	0,085	0,125	0,246	0,354	1,181	2,210	1,856
300	0,050	0,056	0,071	0,148	0,283	0,561	0,553
500	0,037	0,042	0,048	0,069	0,135	0,267	0,250
900	0,029	0,030	0,032	0,043	0,063	0,112	0,112
1800	0,021	0,020	0,022	0,024	0,030	0,042	—

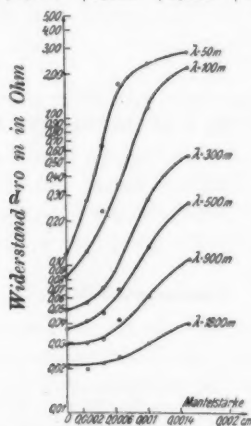
Vereisenter Kupferdraht $r = 0,09776$ cm.

Fig. 8.

Mit Hilfe dieser Methode werden die Widerstandsverhältnisse von geraden Leitern, die mit elektrolytischen oder galvanisch niedergeschlagenen Metallmänteln versehen sind, bei verschiedenen Mantelstärken und Wellenlängen untersucht. Es ergeben sich daraus folgende Schlüsse:

1. Dünne Mäntel geringer Leitfähigkeit (Elektrolyte) bewirken nur bei sehr kurzen Wellen merkliche Vergrößerung des Widerstandes. In stärkerer Schicht wirken sie auch bei längeren Wellen ungünstig ein.

2. Mäntel von gutleitenden nicht ferromagnetischen Metallen auf weniger gutleitenden nicht ferromagnetischen Drähten zeigen die bekannte Verbesserung der Leitfähigkeit, ohne daß besondere Erscheinungen dabei zu bemerken sind.

3. Bei gutleitenden nicht ferromagnetischen Mänteln auf ferromagnetischen Drähten zeigt sich der Übergang der Hauptleitung auf den Mantel schon bei geringer Mantelstärke. In einem bestimmten Gebiet der Mantelstärke erwies sich der Hochfrequenzwiderstand als nur wenig abhängig von der Wellenlänge.

4. Ferromagnetische Mäntel auf nicht ferromagnetischen gutleitenden Drähten zeigen eine sehr starke Zunahme des Widerstandes mit der Frequenz.

Die vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Universität Jena angefertigt.

Der Abschluß gibt mir eine angenehme Gelegenheit, meinem hochverehrten Lehrer, Hrn. Geh. Hofrat Prof. Dr. M. Wien, auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank zu sagen für das stete Interesse und freundliche Eingehen, mit dem er die Arbeit in hohem Maße förderte.

(Eingegangen 13. Februar 1923.)

**2. Über die Fortpflanzung elektrischer Wellen
an einem geraden Metalldraht, der mit einem
leitenden Mantel versehen ist;
von K. Försterling.**

Einleitung.

Eine strenge Theorie zu den vorstehenden Untersuchungen von Hrn. Trautmann „Über den Hochfrequenzwiderstand von geraden Drähten, die mit leitenden Mänteln versehen sind“ hätte von den Maxwellschen Gleichungen und den Grenzbedingungen an der Oberfläche zylindrischer Leiter auszugehen. Wenn es auch ohne weiteres möglich ist, die Lösung in Besselschen Funktionen hinzuschreiben¹⁾, so bietet doch ihre Diskussion und damit ihr physikalisches Verständnis bisher nicht überwundene Schwierigkeiten. In der nachfolgenden Arbeit soll von vornherein von einer angenäherten Betrachtung Gebrauch gemacht werden, wie sie M. Abraham²⁾ zur Berechnung des Skin-effektes hochfrequenter Ströme an einem einfachen Draht benutzt hat. M. Abraham geht von der Betrachtung einer ebenen Grenze aus und beschränkt sich auf den Fall, daß die Wellen nur sehr wenig in den Leiter eindringen. Die Resultate, welche an ebenen Grenzflächen gewonnen sind, lassen sich dann auf zylindrische Leiter übertragen, wenn der Zylinder-radius \bar{r} groß neben der Eindringungstiefe der Wellen ist, und solange man sich im Außenraum auf die unmittelbare Nachbarschaft der Grenze beschränkt. Diese Überlegungen lassen sich auch mathematisch rechtfertigen. Die Lösung der Maxwellschen Gleichungen läßt sich nämlich innerhalb des Drahtes mit Hilfe der Besselschen Funktion $J(x)$ darstellen, wobei x die Entfernung von der Zylinderachse r multipliziert mit einer Konstanten bedeutet. Falls die Wellen nur wenig in den

1) F. Harms, Ann. d. Phys. 23. S. 44. 1907.

2) M. Abraham, Theorie d. Elektrizität I. S. 338. Leipzig. 1912.

Draht eindringen, ist x eine so große Zahl, daß man $J(x)$ durch seinen asymptotischen Wert ersetzen kann. Dieser ist bekanntlich die e -Funktion multipliziert mit $1/\sqrt{x}$. Ist nun die ganze Tiefe, welche die Wellen im Draht erreichen, sehr klein neben dem Drahtradius \bar{r} , so ändert sich x in diesem Bereiche so wenig, daß für \sqrt{x} ein konstanter Mittelwert gesetzt werden kann. Wir haben es an Stelle der Besselschen Funktionen dann nur mit der e -Funktion zu tun, d. h. mit der Lösung des Problems für ebene Grenzflächen.

Wir werden allerdings auf die Fortpflanzung von Oberflächenwellen an ebenen Grenzen etwas näher eingehen müssen, als dies bei M. Abrahams Behandlung des einfachen homogenen Drahtes nötig war. Es ist zunächst die Bedingung dafür aufzustellen, daß das Feld sich auf die Nähe der Grenzfläche beschränkt. Hieraus ergeben sich die Gesetze der Fortpflanzung und Schwingungsform. Im Falle eines einfachen homogenen Leiters mit einer Grenze an das Vakuum führen unsere Resultate zu denjenigen zurück, welche E. Cohn und J. Zenneck bereits erhalten haben.

Indem wir dann zu zylindrischen Leitern übergehen, dürfen wir unsere Resultate als angenähert richtig für das Innere des Drahtes und die unmittelbare Umgebung außerhalb desselben ansehen. Ein Vergleich mit der strengen Sommerfeldschen Theorie¹⁾ für den Spezialfall eines einzelnen homogenen Drahtes zeigt, daß die tangentiellen Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke \mathcal{E} und \mathcal{H} genau mit den Sommerfeldschen Werten übereinstimmt, und daß die zur Oberfläche senkrechten Komponente \mathcal{E}_n nur sehr wenig abweicht, nämlich in demselben Maße wie die Geschwindigkeit der Drahtwellen (bei geringer Eindringungstiefe) von der Lichtgeschwindigkeit.

Mit Hilfe des „komplexen“ Poyntingschen Vektors erhalten wir nach dem Vorgange von Emde²⁾ sogleich die „innere“ Selbstinduktion und den Hochfrequenzwiderstand des Leiters. Natürlich führen unsere Formeln für den homogenen Draht auf die Betrachtungen Abrahams und zu den Rayleigh-

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 67. S. 233. 1899.

2) F. Emde, Elektrotech. u. Maschinenbau 27. S. 79 u. 111. 1903.

schen Formeln zurück. Für einen metallischen Draht, der von einem leitenden Mantel umgeben ist, gelangen wir dagegen zur Darstellung der experimentellen Ergebnisse von Trautmann.

§ 1. Die Fortpflanzung von Oberflächenwellen längs ebener Leiter.

In der XY -Ebene mögen zwei Medien zusammenstoßen, deren Dielektrizitätskonstante, Leitfähigkeit, Magnetisierungskonstante und Brechungsindex ϵ_1 , σ_1 , μ_1 und n_1 bzw. ϵ_2 , σ_2 , μ_2 und n_2 seien. Der Brechungsindex ist im allgemeinen komplex, man setzt:

$$n = n(1 - i\kappa)$$

und der imaginäre Teil $n\kappa$ bestimmt die Größe der Absorption einer ebenen homogenen Welle. Der komplexe Brechungsindex einer Welle von der Frequenz ν oder Periode τ ist nach der Maxwellschen Theorie durch die Beziehung gegeben:

$$(1) \quad n^2 = \mu(\epsilon - 2i\sigma\tau).$$

Wir werden es in der vorliegenden Arbeit mit Wellen von über 30 cm Wellenlänge und deren Fortpflanzung in Metallen zu tun haben. Dann kann man den Verschiebungsstrom im Metall gegen den Leitungsstrom vernachlässigen und erhält statt (1):

$$(1a) \quad n^2 = -2i\sigma\tau\mu; \quad n = (1 - i)\sqrt{\sigma\tau\mu}.$$

Wie in der Optik gebräuchlich, führen wir die Komponenten der elektrischen Kraft \mathfrak{E} parallel und senkrecht zur Einfallsebene ein und bezeichnen die entsprechenden (komplexen)

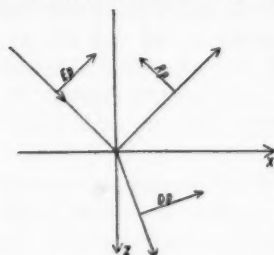


Fig. 1.

Amplituden in der einfallenden Welle mit E_p (\parallel der Einfallsebene) und E_r , in der reflektierten mit R_p und R_r , und in der durchgegangenen mit D_p und D_r .

Die s -Komponenten rechnen wir positiv $\parallel +Y$, die p -Komponenten in der gebräuchlichen Weise¹⁾, so wie es Fig. 1 angibt. Die Grenzbedingungen verlangen

Stetigkeit der tangentiellen Komponenten von \mathfrak{E} und \mathfrak{H} , also von \mathfrak{E}_x , \mathfrak{E}_y , \mathfrak{H}_x und \mathfrak{H}_y .

1) P. Drude, Lehrbuch der Optik. S. 265. Leipzig 1906.

Wählt man als Einfallsebene die XZ -Ebene, so hat man als Lösung der Maxwell'schen Gleichungen für die Feldstärken der verschiedenen Wellen die Form:

$$A e^{i \left(t - \frac{v_h x + \gamma_h z}{c} \right) n_h},$$

wobei

$$\alpha^2 + \gamma^2 = 1$$

und c die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist.

Aus den Grenzbedingungen folgt bekanntlich, daß v für alle Wellen denselben Wert hat, ebenso:

$$(2) \quad \alpha_h n_h \text{ (Brechungsgesetz);}$$

dagegen gilt im ersten Medium:

$$(3) \quad \gamma_e = -\gamma_r.$$

α und γ können auch komplex¹⁾ ausfallen. Sie bestimmen dann nicht nur die Ebene konstanter Phase und die Geschwindigkeit, mit der sich diese vorwärtsbewegt, sondern auch die Lage der Ebene konstanter Amplitude und die Größe der Absorption. α und γ pflegt man als komplexe Richtungs-cosinus zu bezeichnen, da man mit ihnen genau so rechnen kann, wie mit den reellen Cosinus. Wie aus Fig. 1 folgt, gelten die Beziehungen für die einfallende Welle:

$$(4) \quad (\mathfrak{E}_x)_e = \gamma_e E_p e^{i v(\cdot)}; (\mathfrak{E}_y)_e = E_s e^{i v(\cdot)}; (\mathfrak{E}_z)_e = -\alpha_e E_p e^{i v(\cdot)}$$

und daher nach den Maxwell'schen Gleichungen

$$(4a) \quad \begin{cases} (\mathfrak{H}_x)_e = -\frac{n_1}{\mu_1} \gamma_e E_s e^{i v(\cdot)}; (\mathfrak{H}_y)_e = +\frac{n_1}{\mu_1} \alpha_e E_p e^{i v(\cdot)} \\ (\mathfrak{H}_z)_e = \frac{n_1}{\mu_1} (\gamma_e \mathfrak{E}_{zs} - \alpha_e \mathfrak{E}_{xe}) = \frac{n_1}{\mu_1} E_p e^{i v(\cdot)} \end{cases}$$

und genau die gleichen Beziehungen gelten für die übrigen Wellen. Führt man die Abkürzung:

$$(5) \quad n' = \frac{n}{\mu}$$

ein, so haben die Grenzbedingungen genau die Form wie in der gewöhnlichen Optik, nur daß an Stelle von n jetzt n' steht (da man in der Optik $\mu = 1$ zu setzen pflegt), und lauten im

1) Vgl. z. B. W. Voigt, Magneto- u. Elektro-Optik. S. 291 u. 301. Leipzig 1908.

Fälle nur zweier Medien z. B. für die p -Komponenten, (\mathfrak{E}_x und \mathfrak{H}_y stetig), wenn $\gamma_e = -\gamma_r = \gamma_1$, $\gamma_d = \gamma_2$ und $\alpha_e = \alpha_r = \alpha_1$, $\alpha_d = \alpha_2$:

$$\begin{aligned}\gamma_1(E_p - R_p) &= \gamma_2 D_p \\ n_1'(E_p + R_p) &= n_2' D_p.\end{aligned}$$

Ähnliche Bedingungen gelten für die s -Komponenten. Aus ihnen folgt die Unabhängigkeit der p -Komponenten von den s -Komponenten, ferner die Proportionalität von R_p und D_p mit E_p , von R_s und D_s mit E_s . Wir setzen:

$$(6) \quad R_p = r_p E_p; \quad R_s = r_s E_s.$$

Die r haben die aus der Optik bekannte Form des Fresnelschen Reflexionskoeffizienten:

$$(7) \quad r_p = \frac{n_2' \gamma_1 - n_1' \gamma_2}{n_2' \gamma_1 + n_1' \gamma_2}; \quad r_s = \frac{n_1' \gamma_1 - n_2' \gamma_2}{n_1' \gamma_1 + n_2' \gamma_2}.$$

Uns interessiert in erster Linie der Fall, daß drei Medien mit parallelen Grenzflächen den Raum erfüllen. Das mittlere (zweite) Medium habe die Dicke l . Wieder ergeben die Grenzbedingungen, daß

$$v \text{ und } n_h \alpha_h$$

für alle Wellen denselben Wert haben. Ferner ist im ersten Medium $\gamma_e = -\gamma_r$. Wir führen die Reflexionskoeffizienten

$$(7a) \quad r_p' = \frac{n_2' \gamma_2 - n_1' \gamma_3}{n_2' \gamma_2 + n_1' \gamma_3}, \quad r_s' = \frac{n_2' \gamma_2 - n_3' \gamma_3}{n_2' \gamma_2 + n_3' \gamma_3}$$

ein. Diese wären für die Reflexion an der Grenze des zweiten und dritten Mediums maßgebend, wenn diese beiden Medien allein vorhanden wären und den ganzen Raum ausfüllten.

Im Falle dreier Medien gilt wieder

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} R = \varrho E, \\ \text{wenn jetzt} \\ \varrho = \frac{r + r' e^{-2}}{1 + r r' e^{-2}} \\ \text{bedeutet, wobei} \\ e = e^{2\pi i n_2 \gamma_2 l / \lambda} \\ (\lambda \text{ Wellenlänge im Vakuum}). \end{array} \right.$$

Diese Gleichung gilt je nachdem man den Index s oder p hinzufügt, sowohl für die parallel wie für die senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Komponente.

Uns wird nun nicht das allgemeine Reflexionsproblem der Optik interessieren, wir werden uns vielmehr auf die Frage beschränken, unter welchen Umständen das Feld sich auf die Nähe der Grenzfläche beschränkt, d. h. wann wir Oberflächenwellen vor uns haben.

Es soll künftig stets vorausgesetzt werden, daß das zweite und dritte Medium absorbiert. Dann nimmt die Energie mit z wie $e^{-4\pi n_2 z/\lambda}$ ab, verschwindet also bei $z = +\infty$. Das erste Medium wird nun im allgemeinen nicht absorbieren, d. h. n_1 wird reell sein. Trotzdem ist zu verlangen, daß sowohl für die einfallende wie die reflektierte Welle für $z = -\infty$

$$e^{-i\nu n_1 \frac{\gamma h}{c} z}$$

verschwindet. Nehmen wir an, daß diese Bedingung für die einfallende Welle wirklich erfüllt sein, so ergibt sich aus

$$\gamma_r = -\gamma_e,$$

daß sie für die reflektierte Welle sicher nicht erfüllt ist, daß im Gegenteil die reflektierte Amplitude bei $z = -\infty$ selbst unendlich wird. Als notwendige Bedingung für das Bestehen von Oberflächenwellen ergibt sich also:

$$(9) \quad R_p = R_s = 0.$$

Dann haben wir es im ersten Medium in der Tat mit einer einheitlichen Wellenfront zu tun, die längs der Oberfläche entlang gleitet.

Als Beispiel betrachten wir zunächst den Fall zweier Medien und behandeln die s - und p -Komponente gesondert.

I. Es sei $E_s = 0$. Dann ist identisch $R_s = 0$ und es bleibt zu erfüllen:

$$R_p = 0 \text{ oder } r_p = 0,$$

d. h. nach (7):

$$n_2' \gamma_1 = n_1' \gamma_2 \text{ oder: } \frac{1}{\mu_2^2} \{n_2^2 - n_2^2 \alpha_1^2\} = \frac{1}{\mu_1^2} \{n_1^2 - n_1^2 \alpha_2^2\},$$

also

$$(10) \quad \alpha_1^2 = \frac{n_2^2 \mu_1^2 / \mu_2^2 - n_1^2}{n_2^2 \left(\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} - \frac{n_1^4}{n_2^4} \right)}; \quad \gamma_1^2 = \frac{n_1^2 \left(1 - \frac{n_2^4}{n_1^4} \right)}{n_2^2 \left(\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} - \frac{n_1^4}{n_2^4} \right)}.$$

3*

Hat man es speziell mit unmagnetisierbaren Medien zu tun und ist das erste Medium der leere Raum, so wird einfach

$$(10a) \quad \alpha_1^2 = \frac{n_2^2}{n_2^2 + 1}; \quad \gamma_1^2 = \frac{1}{n_2^2 + 1}.$$

Wir werden es im folgenden immer mit Metallen zu tun haben. Hier ist n_2^2 immer groß neben 1 und selbst bei Eisen auch neben μ_2^2 . Es ist ja nach (1a)

$$\frac{n_2^2}{\mu_2^2} = -i \frac{2\sigma \cdot \tau}{\mu_2}.$$

In Eisen ist etwa $\sigma_2 = 5 \cdot 10^{16}$, $\mu_2 = 200$, da es sich um die Anfangspermeabilität handelt. Für $\lambda = 30$ cm, d. h. $\tau = 10^{-9}$ Sek. ist daher

$$\left(\frac{n_2^2}{\mu_2^2}\right) = 5 \cdot 10^5,$$

also eine sehr große Zahl, neben der 1 wegbleiben kann. Dann geht die Gleichung (10) über in

$$(10b) \quad \alpha_1^2 = 1; \quad \gamma_1^2 = \frac{n_1^2 \mu_2^2}{n_2^2 \mu_1^2}; \quad \gamma_1 = \frac{n_1 \mu_2}{n_2 \mu_1}.$$

Die Schwingungsform ist gegeben durch

$$(11) \quad \frac{\mathfrak{E}_z}{\mathfrak{E}_x} = -\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{n_2 \mu_1}{n_1 \mu_2},$$

während sich

$$(11a) \quad \frac{\mathfrak{H}_y}{\mathfrak{E}_x} = \frac{n_1}{\mu_1 \gamma_1}, \quad \mathfrak{H}_x = \mathfrak{H}_z = 0;$$

aus den Maxwellschen Gleichungen ergibt.

Grenzt der Leiter an das Vakuum ($n_1 = \mu_1 = 1$), so ist nach (10b) die Abnahme der Amplitude durch

$$e^{-i \frac{v}{c} \frac{\mu_2 \cdot i}{V \sigma \tau \mu_2} z} = e^{+ \frac{v}{c} \frac{z}{V \sigma \tau / \mu_2}}$$

gegeben; sie verschwindet also, wie es bei Oberflächenwellen sein muß, bei $z = -\infty$. Diese Resultate sind zuerst von E. Cohn¹⁾ abgeleitet worden.

1) E. Cohn, Das elektromagnetische Feld. S. 453. Leipzig 1900.
— J. Zenneck, Ann. d. Phys. 32. S. 846. 1907.

II. Ist $E_p = 0$, so muß beim Bestehen von Oberflächenwellen $r_s = 0$ sein. Beschränken wir uns auf Metalle, wo wieder $\mu \sigma \tau$ groß neben 1 ist, so kann

$$\gamma_2 = \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{2i\sigma_2\mu_2\tau}}$$

durch 1 ersetzt werden, und es findet sich

$$\gamma_1 = n_2'$$

Hiernach aber würde die Änderung der Amplitude $\|Z$ gegeben sein durch

$$e^{+i\tau i \frac{\sqrt{\sigma_2\mu_2\tau}}{\mu_2 c} z} = e^{-\tau \frac{\sqrt{\epsilon_2\mu_2\alpha}}{\mu_2 c} z}$$

Die Amplitude wächst aber für $z = -\infty$ selbst ins Unendliche. Dieser Fall, welcher „magnetischen“ Oberflächenwellen entsprechen würde, führt also, so lange es sich um ebene Grenzen handelt, zu keinen physikalisch möglichen Resultaten.

Wir setzen daher künftig von vornherein

$$E_s = 0$$

voraus.

Wir übertragen jetzt gemäß unseren Überlegungen in der Einleitung die gewonnenen Resultate auf zylindrische Leiter. Für einen homogenen Draht sind wir in der Lage, unsere Resultate mit denen Sommerfelds zu vergleichen.

Es ist zu bemerken, daß bei Sommerfeld die Achse des Drahtes in der Z -Richtung, bei uns in der X -Richtung liegt. Wenn wir zum Draht übergehen, werden wir zweckmäßig statt \mathcal{E}_z jetzt \mathcal{E}_r , statt \mathcal{H}_y : \mathcal{H}_φ einführen.

Bei Sommerfeld ist die Abkürzung

$$(12) \quad k^2 = \left(\frac{2\pi}{\tau c}\right)^2 n^2,$$

wobei n die im vorausgehenden benutzte Bedeutung hat. n ist aber nicht mehr genau das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit c zur Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Drahtwellen. Sei λ die wirkliche Wellenlänge der Drahtwellen, κ eine neue Konstante, so ist bei Sommerfeld die Größe (Gleichung [8'] bei Sommerfeld)

$$(12a) \quad \frac{2\pi}{\lambda} - i\kappa = c \quad (= q \text{ hier gesetzt}),$$

die wir hier aber mit q bezeichnen wollen, da c wie üblich schon als Abkürzung verwandt ist. Θ bedeutet bei Sommerfeld eine Abkürzung (vgl. S. 54 dieser Abhandlung), die nur wenig von der Frequenz und dem Drahtradius abhängt und welche im Mittel $= 1/20$ gesetzt werden kann. Die Geschwindigkeit bestimmt sich dann aus der Gleichung

$$(13) \quad \bar{r}(k_1^2 - q^2) = + 2\Theta i \frac{k_1^2 \mu_2}{k_2 \mu_1} = + 2\Theta i \frac{\nu}{c} \frac{n_1^2 \mu_2}{n_2 \mu_1}$$

und ergibt sich in den meist zur Verwendung kommenden Fällen als sehr wenig von $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/Sek. verschieden.

Für den hier allein in Frage kommenden Fall hinreichend dicker Drähte findet Sommerfeld im Außenraum direkt an der Drahtoberfläche, wobei α eine uns nicht interessierende Konstante ist (bei Sommerfeld ist $L = 2\Theta$)

$$\mathfrak{E}_x = \alpha; \quad \mathfrak{E}_r = \frac{i\alpha q}{(k_1^2 - q^2)\bar{r}} 2\Theta; \quad \mathfrak{H}_\varphi = \frac{i\alpha k_1 2\Theta}{\bar{r}(k_1^2 - q^2)}.$$

Führt man aus der Gleichung (S. 274 bei Sommerfeld) den Wert für $(k_1^2 - q^2)\bar{r}$ ein, so erhält man

$$\frac{\mathfrak{E}_r}{\mathfrak{E}_x} = \frac{q}{k_1} \frac{n_2 \mu_1}{n_1 \mu_2}; \quad \frac{\mathfrak{H}_\varphi}{\mathfrak{E}_x} = \frac{n_2}{\mu_2}.$$

Die erste dieser Gleichungen stimmt mit der Gleichung (11) sehr angenähert überein, so lange q und k_1 sich wenig unterscheiden, d. h. solange die Geschwindigkeit der Wellen nahezu gleich der Lichtgeschwindigkeit ist (vgl. Tabelle 277 bei Sommerfeld). Die zweite Gleichung ist mit unserer Gleichung (11a) genau identisch. Wir werden zur Berechnung des Hochfrequenzwiderstandes nur \mathfrak{H}_φ und \mathfrak{E}_x brauchen. Da die Fehler beim Übergang vom ebenen Problem zum zylindrischen Leiter wohl in gleicher Weise beim homogenen Draht wie bei einem zylindrischen Kern mit Mantel auftreten, so liegt in der erhaltenen Übereinstimmung mit den Sommerfeldschen Resultaten, namentlich für die tangentiellen Komponenten der Feldstärken, eine Rechtfertigung für unsere weitere Betrachtungsweise.

§ 2. Berechnung des Widerstandes mit Hilfe des komplexen Poyntingschen Vektors.

Um den Wechselstromwiderstand zu berechnen, knüpfen wir an den Energiestrom an, welcher in den Leiter eindringt,

und zwar betrachten wir mit F. Emde den komplexen Poyntingschen Vektor \mathfrak{U} . Sei \mathfrak{U}^* die zu \mathfrak{U} komplex konjugierte Größe, n bedeute die Richtung der inneren Normalen. Integriert man \mathfrak{U}_n über eine geschlossene Fläche, so gilt¹⁾

$$\int \mathfrak{U}_n df = \frac{c}{8\pi} \int [\mathfrak{E} \mathfrak{H}^*]_n df = \bar{Q} + i 2\nu(\bar{T} - \bar{\Phi}).$$

Hierin ist \bar{Q} der zeitliche Mittelwert der in dem umschlossenen Volumen entwickelten Jouleschen Wärme, \bar{T} und $\bar{\Phi}$ die mittlere magnetische und elektrische Energie desselben Volumens. Wenden wir diese Formel auf das Innere des Metalls an, so ist $\bar{\Phi}$ klein neben \bar{T} und kann fortbleiben.

Betrachten wir also den Energiestrom in der XY -Ebene im ersten Medium, welcher $\parallel + Z$ in den Leiter eintritt, so finden wir, indem wir noch \mathfrak{E} gemäß (4 und 4a) durch \mathfrak{H} ersetzen:

$$\frac{c}{8\pi} \int [\mathfrak{E} \mathfrak{H}^*]_n df = \frac{c}{8\pi} \int \mathfrak{E}_x \mathfrak{H}_y^* df = \frac{c}{8\pi} \frac{\mu_1}{n_1} \gamma_1 \int \mathfrak{H}_y \mathfrak{H}_y^* df.$$

Diese Formel können wir auf die Längeneinheit eines zylindrischen Leiters anwenden, ohne daß, wie am Ende des vorigen Paragraphen gezeigt wurde, durch die Übertragung vom ebenen Problem auf die gekrümmte Fläche erhebliche Fehler zu erwarten sind. Da im Metall der Verschiebungsstrom gegenüber dem Leitungsstrom vernachlässigt werden kann, so gilt bei Integration rings um die Peripherie des Kreisquerschnittes des Drahtes

$$\oint \mathfrak{H}_y dy = 2\pi \bar{r} \mathfrak{H}_y = \frac{4\pi}{c} J$$

$$\oint \mathfrak{H}_y^* dy = 2\pi \bar{r} \mathfrak{H}_y^* = \frac{4\pi}{c} J^*.$$

J ist der im Drahte fließende Gesamtstrom; JJ^* ist das Quadrat der maximalen Stromamplitude. Ist J die mittlere Stromstärke, so daß $J^2 = \frac{1}{2} JJ^*$. Dann ergibt sich

$$\frac{c}{8\pi} \int [\mathfrak{E} \mathfrak{H}^*]_n df = \frac{c}{8\pi} \gamma_1 \frac{\mu_1}{n_1} \int \mathfrak{H}_y \mathfrak{H}_y^* df = \frac{2\gamma_1}{\bar{r}c} \frac{\mu_1}{n_1} J^2 = \bar{Q} + 2i\nu\bar{T}.$$

1) Vgl. M. Abraham, Theorie der Elektrizität I. S. 335. Leipzig 1912.

Wir wollen uns im folgenden darauf beschränken, daß das Medium außerhalb des Metalls die Wellen nicht absorbiert; dann ist n_1 reell = n . Setzen wir noch

$$\gamma_1 = \gamma_1' + i\gamma_1'',$$

so finden wir

$$\bar{Q} = \frac{2\gamma_1'}{r c} \frac{\mu_1}{n_1} J^2; \quad \bar{T} = \frac{\gamma_1''}{r c v} \frac{\mu_1}{n_1} J^2.$$

Der Widerstand R und die „innere“ Selbstinduktion L_i werden definiert durch

$$J^2 R = \bar{Q}; \quad \frac{L_i}{2c^2} J^2 = \bar{T}.$$

Hieraus ergibt sich

$$(15) \quad R = \frac{2\gamma_1'}{r c} \frac{\mu_1}{n_1}; \quad L_i = \frac{2c\gamma_1''}{r v} \frac{\mu_1}{n_1}.$$

Der Einfachheit halber soll künftig stets angenommen werden, daß der leere Raum das erste Medium bildet; dann wird einfacher

$$(15a) \quad R = \frac{2\gamma_1'}{r c}; \quad L_i = \frac{2c\gamma_1''}{r v}.$$

Wir schreiben diese Formeln zunächst für den homogenen Draht hin. Hier ist nach (10b) und (1a)

$$\gamma_1 = \frac{\mu_2}{n_2} = \frac{\mu_2}{(1-i)\sqrt{\sigma_2\mu_2\tau}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2\tau}} \cdot \frac{1+i}{2}.$$

Also

$$(16) \quad R = \frac{1}{r c} \sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2\tau}}; \quad L_i = \frac{c}{r v} \sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2\tau}} = \frac{c}{2\pi r} \sqrt{\frac{\mu_2\tau}{\sigma_2}}$$

in Übereinstimmung mit den Rayleighschen Formeln.

Um die entsprechenden Ausdrücke für einen zylindrischen leitenden Kern umgeben von einem leitenden Mantel von der Dicke l zu finden, haben wir γ_1 aus der Bedingung (9) und (8)

$$R_p = 0 \quad \text{oder} \quad \varrho_p = 0$$

zu berechnen (E_s und damit $R_s = 0$ setzen wir voraus). Die Bedingung $\varrho_p = 0$ läßt sich nach (8) schreiben

$$(17) \quad r_p + r_p' e^{-2} = 0,$$

und r_p und r_p' haben die Form (7) und (7a).

Da wir uns im Gebiete elektrischer Wellen $\lambda > 30$ cm auf Metalle beschränken, können wir eine von P. Drude herührende bereits im sichtbaren Spektralgebiet gültige Annäherung einführen. Bei $n_1 = 1$ ist nämlich

$$\gamma_2 = \sqrt{1 - \frac{\alpha_1^2}{n_2^2}}; \quad \gamma_3 = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{n_3^2}}.$$

Da nun $\alpha_1^2 < 1$ ist und $|n_2^2| = 2\sigma\mu\tau$ eine sehr große Zahl, so können wir ohne merklichen Fehler γ_2 und γ_3 gleich 1 setzen. Dann geht (17) über in

$$(n_2'\gamma_1 - 1)(n_3' + n_2') + (n_2'\gamma_1 + 1)(n_3' - n_2')e^{-2} = 0$$

oder

$$\gamma_1 n_2' [n_3' (1 + e^{-2}) + n_2' (1 - e^{-2})] = n_3' (1 - e^{-2}) + n_2' (1 + e^{-2}),$$

woraus

$$(17) \quad \gamma_1 = \frac{1}{n_2'} \frac{n_3' + n_2' + (n_2' - n_3')e^{-2}}{n_3' + n_2' - (n_2' - n_3')e^{-2}}$$

folgt. Nun ist

$$n' = (1 - i) \sqrt{\frac{\sigma\tau}{\mu}}$$

nach (1a) und (5),

Die Größe

$$(18) \quad \Delta = \frac{n_2' - n_3'}{n_2' + n_3'} = \frac{\sqrt{\frac{\sigma_2}{\mu_2}} - \sqrt{\frac{\sigma_3}{\mu_3}}}{\sqrt{\frac{\sigma_2}{\mu_2}} + \sqrt{\frac{\sigma_3}{\mu_3}}}$$

ist also rein reell; komplex dagegen ist e^{-2} . Wir kürzen noch ab

$$(19) \quad \frac{1 + \Delta e^{-2}}{1 - \Delta e^{-2}} = a + ib$$

und erhalten

$$(20) \quad \gamma_1 = \frac{1 + i}{2 \sqrt{\frac{\tau \sigma_2}{\mu_2}}} \cdot (a + ib),$$

also

$$(20a) \quad \begin{cases} \gamma_1' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2 \tau}} (a - b) \\ \gamma_1'' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2 \tau}} (a + b). \end{cases}$$

Hieraus ergibt sich

$$(21) \quad R = \frac{1}{\bar{r}c} \sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2 \tau}} (a - b); \quad L_i = \frac{c}{2\pi \bar{r}} \sqrt{\frac{\mu_2 \tau}{\sigma_2}} (a + b).$$

Bezeichnen wir die Werte eines massiven Drahtes (sehr großes l) von der Leitfähigkeit σ_2 und Magnetisierungskonstante μ_2 mit R_∞ und $L_{i\infty}$, so haben wir

$$(21a) \quad R = R_\infty (a - b); \quad L_i = L_{i\infty} (a + b).$$

Hierbei ist a und b aus (19) zu berechnen. Wir kürzen noch ab:

$$\eta = 4\pi \sqrt{\mu_2 \sigma_2 \tau} l / \lambda,$$

so daß (da $\gamma_2 = 1$, $n_2^2 = (1 - i) \sqrt{\mu_2 \sigma_2 \tau}$)

$$e^{-2} = e^{-4\pi i n_2 \gamma_2 l / \lambda} = e^{-(1+i)\eta}.$$

wird. Damit geht (19) über in:

$$\begin{aligned} a + ib &= \frac{1 + \Delta e^{-\eta} \cos \eta - i \Delta e^{-\eta} \sin \eta}{1 - \Delta e^{-\eta} \cos \eta + i \Delta e^{-\eta} \sin \eta} \\ &= \frac{1 - \Delta^2 e^{-2\eta} - 2i \Delta e^{-\eta} \sin \eta}{1 + \Delta^2 e^{-2\eta} - 2 \Delta e^{-\eta} \cos \eta}, \end{aligned}$$

so daß:

$$(22) \quad \begin{cases} a = \frac{1 - \Delta^2 e^{-2\eta}}{1 + \Delta^2 e^{-2\eta} - 2 \Delta e^{-\eta} \cos \eta}, \\ b = - \frac{2 \Delta e^{-\eta} \sin \eta}{1 + \Delta^2 e^{-2\eta} - 2 \Delta e^{-\eta} \cos \eta}. \end{cases}$$

Diese Werte in (21) eingeführt, ergeben den Hochfrequenzwiderstand R und die innere Selbstinduktion L_i ausgedrückt durch die Konstanten des Drahtes und die Periode des Wechselstroms. Voraussetzung für ihre Gültigkeit ist natürlich, ebenso wie bei den Grenzformeln von Rayleigh (16), daß das Feld nur wenig in den Leiter eindringt.

Ist die Dicke des Mantels so groß, daß die Wellen den Kern nicht mehr erreichen, d. h. ist $e^{-\eta}$ sehr klein, so wird

$$a = 1, \quad b = 0.$$

Man kommt wie man aus (21) oder (21a) sogleich ersieht, auf die Rayleighschen Formeln für einen massiven Draht aus dem Material des Mantels.

Ist andererseits die Dicke des Mantels sehr klein, so daß η verschwindet, so erhält man:

$$a = \frac{1 - D^2}{(1 - D)^2} = \frac{1 + D}{1 - D} = \frac{\sqrt{\frac{\sigma_2}{\mu_2}}}{\sqrt{\frac{\sigma_3}{\mu_3}}},$$

$$b = 0.$$

Hiermit wird (21):

$$R_0 = \frac{1}{\bar{r} c} \sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2 \tau}}; \quad L_{10} = \frac{c}{2\pi \bar{r}} \sqrt{\frac{\mu_2 \tau}{\sigma_2}}.$$

Wir erhalten also, wie es sein muß, die Werte für R und L ; welche für den Kern ohne Mantel nach (16) gelten würden.

§ 3. Diskussion der erhaltenen Resultate.

Im folgenden soll nun der Ausdruck für den Hochfrequenzwiderstand näher diskutiert werden. Es wird dabei vorausgesetzt, daß die beiden Metalle, welche den Kern und den Mantel bilden, sehr verschiedene Konstanten haben, etwa wie bei den Beobachtungen von Hrn. Trautmann Kupfer und Eisen. Wir setzen dann die kleine Größe:

$$(23) \quad 2 \sqrt{\frac{\sigma_E}{\sigma_{Cu} \mu_E}} = \varepsilon.$$

Das Kupfer kann nun sowohl den Kern als auch den Mantel bilden; für beide Fälle liegen Beobachtungen vor. Wir unterscheiden also zwei Fälle:

I. Zweites Medium (Mantel) Eisen, drittes (Kern) Kupfer. Dann ist nach (18) in Annäherung:

$$(24a) \quad D = \frac{\sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_3 \mu_2}} - 1}{\sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_3 \mu_2}} + 1} = -(1 - \varepsilon).$$

II. Zweites Medium (Mantel) Kupfer, drittes (Kern) Eisen.

$$(24b) \quad D = \frac{1 - \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_3 \mu_2}}}{1 + \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_3 \mu_2}}} = 1 - \varepsilon.$$

Diese Werte sind in die Formel R einzuführen, welche sich aus (21) und (22) ergibt zu:

$$(25) \quad R = \frac{1}{c\bar{r}} \sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2 \tau}} \frac{1 - \Delta^2 e^{-2\eta} + 2\Delta e^{-\eta} \sin \eta}{1 + \Delta^2 e^{-2\eta} - 2\Delta e^{-\eta} \cos \eta} = \frac{1}{c\bar{r}} \sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2 \tau}} Q,$$

worin Q eine leicht ersichtliche Abkürzung ist, und η definiert war durch:

$$(26) \quad \eta = 4\pi \sqrt{\mu_2 \sigma_2 \tau} l / \lambda = 4\pi \sqrt{\frac{\mu_2 \sigma_2}{c}} \frac{l}{\sqrt{\lambda}}.$$

ε betrachten wir als kleine Größe und wir wollen im Schlußresultat ε neben 1 weglassen.

I. Fall: Kupferkern mit Eisenmantel.

Durch Einsetzen von (24a) in (25) findet man:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{e^{+\eta} - e^{-\eta} - 2\sin \eta + 2\varepsilon(e^{-\eta} + \sin \eta) - \varepsilon^2 e^{-\eta}}{e^{+\eta} + e^{-\eta} + 2\cos \eta - 2\varepsilon(e^{-\eta} + \cos \eta) + \varepsilon^2 e^{-\eta}} \\ &= \frac{\sin \eta - \sin \eta + \varepsilon(e^{-\eta} + \sin \eta)}{\cos \eta + \cos \eta - \varepsilon(e^{-\eta} + \cos \eta)} \end{aligned}$$

Hierin konnten die Glieder mit ε^2 in unserer Näherung fortbleiben; Sin und Cos bedeuten die hyperbolischen Funktionen.

Bereits für $\eta = \frac{\pi}{2}$ wird:

$$Q = \frac{1,1 + 1,22 \varepsilon}{2,3 - 0,22 \varepsilon}$$

und wir können die Glieder mit ε überhaupt außer acht lassen, so daß:

$$(27) \quad Q = \frac{\sin \eta - \sin \eta}{\cos \eta + \cos \eta}, \quad \eta > 1,5.$$

Für kleine η entwickeln wir den Zähler von Q in einer Potenzreihe nach η und bemerken, daß auch jetzt die Glieder mit ε^2 fortbleiben können.

Zunächst ist:

$$\sin \eta - \sin \eta = \frac{2\eta^3}{3!} \left\{ 1 + \frac{3!}{4!} \eta^4 \dots \right.$$

Für $\eta = 1,5$ hat $\frac{3!}{4!} \eta^4$ etwa den Wert $\frac{1}{170}$ und kann also für $\eta < 1,5$ fortbleiben.

Ferner findet man:

$$e^{-\eta} + \sin \eta = 1 + \frac{1}{2!} \eta^2 - \frac{2}{3!} \eta^3 + \frac{1}{4!} \eta^4 + \frac{1}{6!} \eta^6.$$

Hierin ist für $\eta = 1,5$ das letzte Glied $= \frac{1}{60}$ und kann weil mit dem kleinen Faktor ε behaftet, fortbleiben. Wir erhalten zunächst, falls man die Glieder etwas anders ordnet:

$$Q = \frac{\frac{1}{3} \eta^3 + \varepsilon \left(1 + \frac{1}{2} \eta^2\right) - \varepsilon \eta^3 \left(\frac{2}{3!} - \frac{1}{4!} \eta\right)}{\cos \eta + \cos \eta - \varepsilon (e^{-\eta} + \sin \eta)}.$$

Die beiden letzten Glieder im Zähler und Nenner sind für $\eta < 8$ beide negativ; die Fehler, die durch ihr Fortlassen entstehen, wirken also gegeneinander. Sie können in unserer Näherung fortbleiben da:

$$\frac{\varepsilon \eta^3 \left(\frac{2}{3!} - \frac{1}{4!} \eta\right)}{\frac{1}{3} \eta^3 + \varepsilon \left(1 + \frac{1}{2} \eta^2\right)} < \frac{\frac{1}{3} \varepsilon \eta^3}{\frac{1}{3} \eta^3} = \varepsilon$$

und:

$$\frac{\varepsilon (e^{-\eta} + \sin \eta)}{\cos \eta + \cos \eta} < \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

da $\cos \eta + \cos \eta > 2$.

Damit sind wir für $\eta < 1,5$ zu der einfachen Formel:

$$(28) \quad Q = \frac{\frac{\eta^2}{3} + \varepsilon \left(1 + \frac{\eta^2}{2}\right)}{\cos \eta + \cos \eta}$$

gelangt. Für sehr kleine η kann man den Nenner durch 2 ersetzen. Dann wird:

$$(29) \quad R = \frac{1}{c\bar{r}} \sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2 \tau}} \left\{ \frac{s}{2} + \frac{\eta^2}{2} \left(\frac{s}{2} + \frac{\eta}{3} \right) \right\}$$

und bei Berücksichtigung von (23), da jetzt Kupfer das dritte, Eisen das zweite Medium, also:

$$\frac{s}{2} = \sqrt{\frac{\sigma_2}{\sigma_3 \mu_3}},$$

$$(29a) \quad R = \frac{1}{c\bar{r}} \sqrt{\frac{1}{\sigma_3 \tau}} + \frac{1}{c\bar{r}} \sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2 \tau}} \left\{ \frac{\eta^2}{2} \left(\frac{s}{2} + \frac{\eta}{3} \right) \right\}.$$

Bei sehr kleinem η , also bei sehr geringer Mantelstärke, entfernt sich der Widerstand R nur sehr langsam von dem Hochfrequenzwiderstande des Kupfers. Erst wenn η^3 mit ε vergleichbar wird, macht sich der Eisenmantel bemerkbar. Dann allerdings wächst R auch sehr rapide, eben wie η^3 , um schließlich gemäß der Gleichung

$$(30) \quad R = \frac{1}{r c} \sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2 \tau}} \frac{\sin \eta - \sin \eta}{\cos \eta - \cos \eta}$$

in den Hochfrequenzwiderstand des Eisens (σ_2, μ_2) überzugehen. Für $\eta = 4$ ist dieser Zustand schon nahezu erreicht.

Den Verlauf von $\lg R$ in der Abhängigkeit von der Mantelstärke l zeigt Fig. 2; näheres über die Berechnung vgl. S. 52.

II. Eisenkern mit Kupfermantel. Dieser Fall ist interessanter und auch praktisch wichtiger. Wir bilden zunächst aus (24b) und (25):

$$(31) \quad \frac{1}{Q} = \frac{e^{+\eta} + e^{-\eta} - 2 \cos \eta - 2\varepsilon(e^{-\eta} - \cos \eta) + \varepsilon^2 e^{-\eta}}{e^{+\eta} - e^{-\eta} + 2 \sin \eta + 2\varepsilon(e^{-\eta} - \sin \eta) - \varepsilon^2 e^{-\eta}}.$$

Für große η kann man zunächst die Glieder mit ε^2 weglassen und weiterhin auch diejenigen mit ε . Bereits für $\eta = 1,5$ wird:

$$\frac{1}{Q} = \frac{2,8 - \frac{1}{4,5} \varepsilon}{3,3 + 1,2 \varepsilon},$$

so daß die Glieder mit ε wegbleiben können. Es gilt also:

$$(32) \quad \frac{1}{Q} = \frac{\cos \eta - \cos \eta}{\sin \eta + \sin \eta}, \quad \eta > 1,5.$$

Für kleine η müssen wir zu Reihenentwicklungen greifen. Es ist:

$$(33) \quad \begin{cases} e^{+\eta} + e^{-\eta} - 2 \cos \eta = 2\eta^2 \left(1 + \frac{2}{6!} \eta^4 \dots\right) \\ e^{+\eta} - e^{-\eta} + 2 \sin \eta = 4\eta \left(1 + \frac{1}{5!} \eta^4 \dots\right) \end{cases}$$

und in den mit ε multiplizierten Gliedern:

$$\begin{aligned} e^{-\eta} - \cos \eta &= -\eta \left(1 - \eta + \frac{1}{3!} \eta^3 + \frac{1}{5!} \eta^5 \dots\right) \\ e^{-\eta} - \sin \eta &= +1 - 2\eta + \frac{1}{2!} \eta^2 + \frac{1}{4!} \eta^4 \dots \end{aligned}$$

Für η nahe zu Eins überwiegen bereits die von ε freien Glieder; die Genauigkeit wird durch sie bestimmt. Wollen wir η^4 vernachlässigen, so muß also

$$\frac{1}{5!} \eta^4 = \frac{1}{120} \eta^4$$

sehr klein sein. Für $\eta = 1,2$ ist dieser Ausdruck $1/_{60}$. (Die Vernachlässigung von η^4 wirkt in den von ε freien Gliedern gegeneinander.)

$\frac{1}{Q}$ läßt sich mit etwas anderer Anordnung der Glieder schreiben:

$$\frac{1}{Q} = \frac{2\eta^2 + 2\eta\epsilon + \epsilon^2 - \epsilon \left[2\eta^2 \left(1 - \frac{1}{3!}\eta \right) + \epsilon(1 - e^{-\eta}) \right]}{4\eta + 2\epsilon - \epsilon \left[2\eta \left(2 - \frac{1}{4}\eta \right) + \epsilon e^{-\eta} \right]}$$

$$= \frac{2\eta^2 + 2\eta\epsilon + \epsilon^2}{4\eta + 2\epsilon} \frac{1 - \delta_1}{1 - \delta_2} = \frac{2\eta^2 + 2\eta\epsilon + \epsilon^2}{4\eta + 2\epsilon} \{1 - (\delta_1 - \delta_2)\},$$

wobei die δ_1 und δ_2 leicht ersichtliche Abkürzungen bedeuten. Da:

$$1 - e^{-\eta} = \eta - \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{3!}\eta^3 \dots < |\eta|,$$

so gilt:

$$\delta_1 = \epsilon \frac{2\eta^2 \left(1 - \frac{1}{3!}\eta \right) + \epsilon(1 - e^{-\eta})}{2\eta^2 + 2\eta\epsilon + \epsilon^2} < \epsilon \frac{2\eta^2 + \epsilon\eta}{2\eta^2 + 2\eta\epsilon + \epsilon^2} < \epsilon,$$

$$\delta_2 = \epsilon \frac{2\eta \left(2 - \frac{1}{4}\eta \right) + \epsilon e^{-\eta}}{4\eta + 2\epsilon} < \epsilon \frac{4\eta + \epsilon}{4\eta + 2\epsilon} < \epsilon.$$

Es ist also $1/Q$ mit einem Fehler $< \epsilon$ richtig dargestellt durch:

$$(34) \quad \frac{1}{Q} = \frac{2\eta^2 + 2\eta\epsilon + \epsilon^2}{4\eta + 2\epsilon} \quad \eta < 1,2.$$

Nun stellt jetzt:

$$(35) \quad \frac{1}{c\bar{r}} \sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2 \tau}} \cdot \frac{2}{\epsilon} = \frac{1}{c\bar{r}} \sqrt{\frac{\mu_3}{\sigma_3 \tau}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_2 \sigma_2}{\mu_3 \sigma_3}} = \frac{1}{c\bar{r}} \sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_3 \tau}}$$

den Hochfrequenzwiderstand des Kernes (hier des Eisenkernes) ohne Mantel dar. Andererseits ist ($\mu_2 = 1$):

$$(36) \quad \frac{1}{c\bar{r}} \sqrt{\frac{1}{\sigma_2 \tau}} \frac{2}{\eta} = \frac{1}{c\bar{r}} \sqrt{\frac{1}{\sigma_2 \tau}} \cdot \frac{1}{2\pi \sqrt{\sigma_2 \tau}} \frac{\lambda}{l} = \frac{1}{2\pi r l \sigma_2},$$

der Gleichstromwiderstand, welchen der Kupfermantel für sich bieten würde, wenn er etwa auf einen nichtleitenden Kern säße; $2\pi r l = g_2$ ist ja der Querschnitt des Mantels.

Nunmehr ist es nicht schwer, den Verlauf von R als Funktion von η anzugeben. Für sehr kleine η ($\eta < \epsilon$) setzen wir in (34) für $\eta/\epsilon = x$, so daß gilt:

$$(37) \quad R = \frac{1}{c\bar{r}} \sqrt{\frac{\mu_3}{\sigma_3 \tau}} \cdot \frac{2x + 1}{2x^2 + 2x + 1}$$

oder noch übersichtlicher:

$$(37a) \quad \frac{1}{R} = c \bar{r} \sqrt{\frac{\sigma_3 \tau}{\mu_3}} \left\{ 1 + \frac{2x^2}{2x+1} \right\}.$$

Nach diesem Gesetz entfernt sich also mit wachsendem η oder x der Widerstand vom Hochfrequenzwiderstand des Eisens. Der Unterschied wird sehr bald erheblich, nämlich sobald η von der gleichen Größenordnung des sehr kleinen ε geworden ist. Für $\eta = \varepsilon$ ist bereits ($x = 1$):

$$R = \frac{3}{5} \frac{1}{c \bar{r}} \sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_3 \tau}}.$$

Für $\eta > \varepsilon$ führt man zweckmäßig

$$\frac{\varepsilon}{\eta} = y$$

ein. Dann wird

$$(38) \quad \frac{1}{R} = q_2 \sigma_2 \left\{ 1 + y \frac{y+1}{y+2} \right\}.$$

Mit wachsendem η wird y immer kleiner und kleiner. Da unsere Annäherung bis $\eta = 1,2$ etwa reicht, so wird es ein ganzes Bereich geben, wo

$$y \frac{y+1}{y+2} \text{ neben } 1$$

fortbleiben kann. Hier, also in der Umgebung von $\eta = 1$, ist der Hochfrequenzwiderstand des Eisendrahtes mit Kupfermantel nahezu gleich dem Gleichstromwiderstand des Kupfermantels auf isolierendem Material. Bei derselben Dicke des Mantels wird also ein ganzes Bereich von Wellenlängen nahezu denselben Widerstand haben.

Weiterhin weicht dann der Hochfrequenzwiderstand des verkupferten Eisendrahtes mit wachsendem η immer mehr von $q_2 \sigma_2$ ab, und nähert sich nach der Formel:

$$(39) \quad R = \frac{1}{c \bar{r}} \sqrt{\frac{1}{\sigma_3 \tau}} \frac{\sin \eta + \sin \eta}{\cos \eta - \cos \eta}$$

dem Hochfrequenzwiderstande eines massiven Kupferdrahtes, der bei $\eta = 4$ schon nahezu erreicht wird.

Übrigens ist die Annäherung des Widerstandes an den Wert für „unendlich“ große Schichtdicken keineswegs gleichmäßig, da die vom Kern zurückgeworfenen Wellen mit den

auftreffenden interferieren. Für hinreichend große η geht nämlich (39) über in:

$$R = \frac{1}{e r} \sqrt{\frac{1}{\sigma_2 \tau}} \{1 + e^{-\eta} (\sin \eta + \cos \eta)\},$$

worin $e^{-\eta} (\sin \eta + \cos \eta)$ bei $\eta = \pi$ ein Extremum hat, vgl. Fig. 3. Analoges folgt auch aus (30) für den Kupferdraht mit Eisenkern.

Besonders interessant ist das Gebiet, in dem der Widerstand für verschiedene Wellenlängen gleich wird. Solange Formel (38) gilt, können wir die Verhältnisse leicht übersehen, aber für größere η fehlt gerade eine gute Entwicklung. Wir geben eine etwas größere Fehlergrenze zu, und bemerken, daß bei $\eta = 1,2$ in Formel (34) sicher ε^2 fortgelassen werden kann, dann aber auch das Glied mit ε selbst, denn in

$$\frac{1}{Q} = \frac{2\eta(\eta + \varepsilon)}{4\eta + 2\varepsilon}$$

steht bei $\eta = 1,2$ das ε direkt neben 1. In der letzten Formel wirken zwar die so entstehenden Fehler gegeneinander, aber möglicherweise addieren sich die Fehler zusammen mit den durch frühere Vernachlässigungen verursachten. Wenn Q frei von ε ist, gilt aber Formel (32), deren Gültigkeitsbereich wir also bei $\eta = 1,2$ herab ausdehnen. Wenn wir in (32) die Entwicklungen (33) einsetzen, erhalten wir:

$$\frac{1}{Q} = \frac{\eta}{2} \frac{1 + \frac{2}{6!} \eta^4}{1 + \frac{1}{5!} \eta^4} = \frac{\eta}{2} \left(1 - \frac{1}{180} \eta^4\right).$$

Also, mit Benutzung von (36):

$$(40) \quad \frac{1}{R} = q_2 \sigma_2 \left\{1 - \frac{1}{180} \eta^4\right\} \quad \eta > 1,2.$$

Da nun (38) in dem in Frage kommenden Bereich um $\eta = 1$ y eine sehr kleine Zahl ist, so wird angenähert:

$$(41) \quad \frac{1}{R} = q_2 \sigma_2 \left\{1 + \frac{1}{2} y\right\} = q_2 \sigma_2 \left\{1 + \frac{\varepsilon}{2\eta}\right\}; \quad \eta < 1,2.$$

Wir wollen jetzt einen Metallmantel von gegebener Dicke voraussetzen und nach dem Wellenlängenbereich fragen, in dem

$$\left| \frac{1}{R} - q_2 \sigma_2 \right| < a$$

ist, wobei a eine vorgegebene Größe sein mag, die natürlich mit dem Gültigkeitsbereich der Formeln (40) und (41) im Einklang sein muß. Aus diesen Gleichungen folgt dann:

$$\frac{1}{\eta_1^2} = \sqrt{\frac{1}{180a}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\eta_2^2} = \frac{4a^2}{\varepsilon^2}, \quad \text{wobei } \eta_1 > \eta_2.$$

Da wir in Näherung $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\eta_1^2} + \frac{1}{\eta_2^2} \right)$ durch Eins ersetzen können, so folgt, da nach (26):

$$\frac{1}{\eta_h} = \frac{1}{4\pi l} \sqrt{\frac{c}{\mu_3 \sigma_2}} \sqrt{\lambda_h}$$

$$\frac{\frac{1}{\eta_2^2} - \frac{1}{\eta_1^2}}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\eta_2^2} + \frac{1}{\eta_1^2} \right)} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\frac{1}{2} (\lambda_2 + \lambda_1)} = \frac{4a^2}{\varepsilon^2} - \sqrt{\frac{1}{180a}}.$$

Da $\eta_1 > \eta_2$, ist bei angemessener Wahl von a die rechte Seite positiv. $\sqrt{\frac{1}{180a}}$ hängt nicht mehr von den Konstanten des Materials ab, sondern nur $4a^2/\varepsilon$. Soll der Widerstand über ein möglichst großes Wellenlängenbereich konstant sein, so muß also $4a^2/\varepsilon^2$ möglichst groß, also

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sigma_3 \mu_2}{\mu_1 \sigma_2}}$$

möglichst klein gewählt werden. Aus diesem Grunde ist die Wahl von Kupfer bei dessen großer Leitfähigkeit sehr günstig; das Eisen wird man mit möglichst großer Magnetisierungszahl und möglichst geringer spezifischer Leitfähigkeit nehmen. Für Eisendraht mit Kupfermantel ist ε etwa 0,08.

Bei $\eta = 1$ weicht $1/R$ nach (41) nur durch den Faktor $\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ von $q_2 \sigma_2$ ab, also in unserer Annäherung gar nicht. Möge dem Wert $\eta = 1$ die Wellenlänge λ_0 entsprechen, so findet man aus (41):

$$(41a) \quad \frac{\frac{1}{R} - q_2 \sigma_2}{q_2 \sigma_2} \quad \text{oder nahezu:} \quad \frac{\frac{1}{q_2 \sigma_2} - R}{R} = \frac{\varepsilon}{2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_0}}, \quad \lambda_0 < \lambda$$

und aus (40):

$$(40a) \quad \frac{\frac{1}{q_2 \sigma_2} + R}{R} = -\frac{1}{180} \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \quad \lambda_0 > \lambda.$$

Ist λ selbst 9 mal größer als λ_0 , so folgt aus (41a) für die prozentuelle Änderung von R erst $\frac{3}{2}\varepsilon$; also für unseren Fall etwa um 12 Proz. Die Unabhängigkeit des Widerstandes von der Wellenlänge ist also um so besser, je kleiner ε ist.

Ist dagegen $\lambda = \frac{1}{2}\lambda_0$, so ist nach (40a) die prozentuelle Widerstandsänderung 9 Proz.; ihre Größe ist in diesem Bereich ($\eta > 1$) unabhängig von den genauen Konstanten des Materials. Diese Zahlenangaben sind nur Überschlagswerte, da ihre Größe nahe mit den von uns vernachlässigten Werten übereinstimmt.

§ 4. Vergleich mit den Beobachtungen von F. Trautmann.

Um die Resultate von Hrn. Trautmann mit unseren Formeln zu vergleichen, haben wir zunächst nachzusehen, in wie weit die Voraussetzungen der Theorie erfüllt sind, d. h. ob

$$k_2 \bar{r} = (1 - i) \cdot 2\pi \sqrt{\frac{\mu \sigma}{c^2 \tau}} \cdot \bar{r}$$

so groß ist, daß die Anwendung der asymptotischen Werte der Besselschen Funktionen gestattet ist. Für Kupfer ist etwa $\sigma = 5 \cdot 10^{17}$, für Eisen $\sigma = 5 \cdot 10^{16}$, $\mu > 50$; ϱ war 0,1 cm und für λ setzen wir 900 m, so daß $\tau = 3 \cdot 10^{-6}$ Sek. Daraus ergibt sich

$$\text{für Kupfer: } |k_2 \bar{r}| = 11.$$

$$\text{Eisen: } |k_2 \bar{r}| = 25.$$

Für diese Werte des Arguments bilden aber die asymptotischen Darstellungen bereits eine recht gute Näherung; besonders bei Eisen ist der Fehler bereits recht klein.

Unter diesen Umständen führt die Theorie für den Hochfrequenzwiderstand eines massiven Drahtes auf die Beziehung¹⁾:

$$R = \frac{1}{\bar{r} c} \sqrt{\frac{\mu}{\sigma \tau}} + \frac{R_0}{4},$$

wobei R_0 der Gleichstromwiderstand ist. Das Glied $R_0/4$ ist nun in der Tat bei den vorliegenden Versuchen sehr klein und erreicht im Maximum bei Kupfer 6 Proz. bei Eisen und Stahl 1,8 bzw. 1,6 Proz., so daß wir es in der Tat vernachlässigen können und die Anwendung unserer Formeln bei $\lambda = 900$ m gesichert ist. Es

1) Vgl. M. Abraham, Math. Encykl. V. 2. S. 517.

müssen sich zunächst die an den massiven Drähten gemessenen Widerstände wie $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ verhalten. Wir finden für die Verhältnissreihe

$$:\sqrt{\lambda_{50}}:\sqrt{\lambda_{150}}:\dots = \frac{1}{R_{50}}:\frac{1}{R_{150}}\dots$$

	1	1,41	1,76	2,42	3,16	4,23
für Eisen = 1	1,35	1,62	2,19	2,74	3,50	
„ Stahl = 1	1,35	1,62	2,26	2,88	3,80	
„ Kupfer = 1	1,40	—	2,38	3,22	4,10	

Wie man sieht, ist die Übereinstimmung bei Kupfer befriedigend, bei Eisen weniger gut, vor allem systematisch abweichend, obwohl hier die Voraussetzungen der Annäherung besser erfüllt sind. Man wird diese Abweichungen darauf zurückführen, daß μ im Eisen und Stahl nicht in allen Fällen denselben Wert hat. Es kann sein, daß μ hier bereits von der Wellenlänge abhängt, oder aber auch, daß μ an der Oberfläche des Drahtes einen anderen Wert hat, als im Inneren, so daß für kurze Wellen, welche weniger tief eindringen, andere Werte von μ im Mittel in Frage kommen, als für lange Wellen.

Leider sind auch die Leitfähigkeiten der Mäntel nicht sicher bekannt. Wollte man z. B. die Leitfähigkeit des Kupfers aus dem Grenzwert für große Mantelstärke ($l = 0,0061$ cm, η ca. 4,5) bei $\lambda = 50$ m nach der Rayleighschen Formel berechnen, welche hier sicher wegen der geringen Eindringungstiefe gut anwendbar ist, so würde sich ein 1,46 mal *größerer* Wert ergeben, als aus den Messungen am massiven Kupferdraht folgen würde. Ob dieser Effekt reell ist, oder die Oberfläche anders leitet als das Innere des Drahtes, muß dahin gestellt bleiben.

Die Tiefe, in welcher die Amplitude auf den e^{ten} Teil herabgesunken ist, ergibt sich aus der folgenden Tabelle:

Tabelle 1.

	$\lambda = 50$ m	300 m	900 m
Eisen	0,005	0,012	0,021 mm
Kupfer	0,013	0,032	0,055 mm

Aus diesen Gründen mußte auf eine vollkommen exakte quantitative Vergleichung zwischen Theorie und Beobachtung verzichtet werden. Die Kurven Figg. 2 und 3 wurden mit:

$$\sigma_{\text{Cu}} = 5,3 \cdot 10^{17}, \sigma_E = 5,7 \cdot 10^{16}, \mu_E = 67$$

berechnet, Werte, die angenähert den vorliegenden Messungen entsprochen haben dürften. Als Ordinate wurde der Logarithmus des hundertfachen Widerstandes eines Drahtes von 1 m Länge und 1 mm Radius aufgetragen.

Kupferkern mit Eisenmantel.

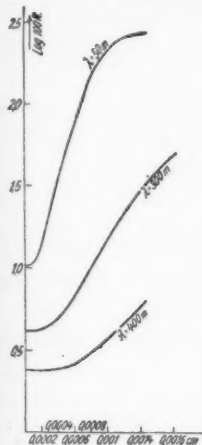


Fig. 2.

Eisendraht mit Kupfermantel.

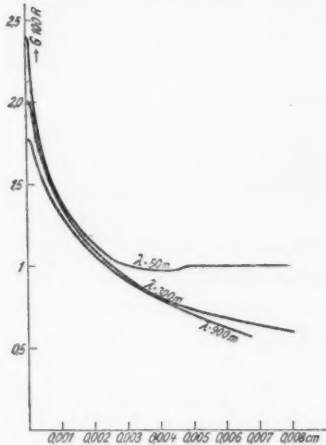


Fig. 3.

Diese Kurvenbilder entsprechen durchaus den Beobachtungen von Hrn. Trautmann.

§ 5. Berechnung des Feldes außerhalb des Leiters und Verallgemeinerung der erhaltenen Resultate.

Unsere Annäherung schränkt von vornherein die Gültigkeit unserer Formeln auf die unmittelbare Nähe der Oberfläche des Drahtes ein. Innerhalb des Drahtes reicht diese Betrachtungsweise aus, solange das Feld sehr wenig in den Leiter eindringt. Im Außenraume geben in einiger Entfernung von der Drahtoberfläche unsere Formeln kein Bild des wirklichen Zustandes, vielmehr muß für die Variablen z oder r an Stelle der e -Funktion, die Besselsche Funktion $K(x)$ treten. Die Lösungen (für den Außenraum) der Maxwell'schen Gleichungen

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 67. S. 233. 1899. Vgl. auch M. Abraham, Math. Encycl. V. 2. S. 528; doch ist hier das Maßsystem ein anderes, es steht σ wo bei uns $4\pi\sigma$ steht.

chungen in Zylinderkoordinaten sind¹⁾, falls das erste Medium das Vakuum ist:

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{E}_x = D (k_1^2 - q^2) K(x_1) e^{i v \left(t - \frac{q}{v} z \right)} \\ \mathfrak{E}_r = -i q D (k_1^2 - q^2)^{1/2} K'(x_1) e^{i v \left(t - \frac{q}{v} z \right)} \\ \mathfrak{H}_\varphi = -i D (k_1^2 - q^2)^{1/2} \frac{v}{c} K'(x_1) e^{i v \left(t - \frac{q}{v} z \right)}. \end{array} \right.$$

Hierin ist:

$$k_1 = \frac{v^2}{c^2}; \quad k_2^2 = \frac{v^2}{c^2} n_2^2$$

$$x_1 = \sqrt{k_1^2 - q^2} r$$

und $K'(x)$ bedeutet $\frac{dK(x)}{dx}$. D und q sind Konstanten. Wir haben gesehen, daß für $r = \bar{r}$ diese Größen in unsere, durch die angenäherte Betrachtungsweise übergehen, und zwar \mathfrak{E}_x und \mathfrak{H}_φ genau, \mathfrak{E}_r bis auf die kleine Differenz zwischen q und c . (S. 38.)

Wir können daher auch für unser Problem eine näherungsweise Darstellung des Feldes erlangen, wenn wir für die Feldstärken den Ansatz (40) machen und die Konstanten D und q so bestimmen, daß etwa die tangentiellen Komponenten in unsere Werte (4, 4a) übergehen; dann geht auch \mathfrak{E}_r angenähert in (4) über.

Da D nur ein Faktor ist, welcher die absolute Größe der Amplitude bestimmt, so bleibt q aus der Gleichung zu berechnen:

$$(41) \quad \left[\frac{\mathfrak{E}_x}{\mathfrak{H}_\varphi} \right]_{r=\bar{r}} = i \frac{c}{v} (k_1^2 - q^2)^{1/2} \frac{K(\bar{x}_1)}{K'(\bar{x}_1)}.$$

Nun ist \bar{x}_1 immer eine sehr kleine Größe, solange der Drahtradius klein gegen die Wellenlänge ist. Man kann dann $K(\bar{x}_1)$ und $K'(\bar{x}_1)$ näherungsweise setzen:

$$K(\bar{x}_1) = \lg \frac{2i\gamma}{\bar{x}_1} = \frac{1}{2\Theta}; \quad K'(\bar{x}_1) = \frac{-1}{\bar{x}_1}.$$

2Θ ist eine Abkürzung. Θ ändert sich sehr wenig mit \bar{r} .²⁾ Führt man für \bar{x}_1 seinen Wert ein, so erhält man:

1) A. Sommerfeld, a. a. O., S. 272f.

$$(41a) \quad \begin{cases} k_1^2 - q^2 = i \frac{\nu}{c} \left[\frac{\mathcal{E}_x}{\mathcal{H}_\varphi} \right]_{r=\bar{r}} \frac{2\Theta}{\bar{r}} \\ = i \frac{\nu}{c} \gamma_1 \frac{2\Theta}{\bar{r}} \text{ wegen (4) und (4a).} \end{cases}$$

Für einen massiven Draht kommt man, wie es ja schon nach den Überlegungen S. 38 zu erwarten ist, zu der Sommerfeldschen Formel (13) zurück, wenn man in (41a) für γ_1 den Wert (10b)

$$\gamma_1 = \frac{\mu_2}{n_2}$$

einführt ($\mu_1 = n_1 = 1$).

Unserer Formel (41a) läßt sich eine etwas andere Form geben. M. Abraham¹⁾ hat im Anschluß an die Sommerfeldsche Arbeit die Kapazität C und die äußere Selbstinduktion L_a berechnet, die sich allein aus den Bestimmungsstücken des Feldes im Außenraum ergeben. Da in unserer Näherung

$$-\frac{K(\bar{x}_1)}{\bar{x}_1 K'(\bar{x}_1)} = + \lg \frac{2i\gamma}{x} = \frac{1}{2\Theta},$$

so werden die Abrahamschen Formeln:

$$C = \epsilon_1 \Theta; \quad L_a = \frac{\mu_1}{\Theta}$$

und

$$C L_a = \epsilon_1 \mu_1$$

stellt das Verhältnis der Geschwindigkeit einer homogenen Welle im ersten Medium zur Lichtgeschwindigkeit im Vakuum dar. Es ist also:

$$k_1^2 = \frac{\nu^2}{c^2} L_a C,$$

während q mit der Geschwindigkeit ω der Drahtwelle zusammenhängt:

$$q^2 = \frac{\nu^2}{c^2} \cdot \frac{c^2}{\omega^2}.$$

Wir können daher (41a) schreiben:

$$q^2 = \frac{\nu^2}{c^2} \cdot \frac{c^2}{\omega^2} = \left(\frac{\nu^2}{c^2} L_a - i \nu \frac{\gamma_1}{c \bar{r}} \right) C.$$

Nun ist nach S. 40:

$$\frac{\gamma_1}{\bar{r} c} = \frac{1}{2} \left(R + i \nu \frac{L_i}{c^2} \right).$$

1) M. Abraham, Math. Encykl. V. 2. S. 530. Formel 55 d und 55 e. Es ist $1/2 \Theta = \zeta$ bei Abraham.

Daher ergibt sich:

$$\frac{c^2}{\omega^2} = \left(L_a + L_i - i \frac{c^2}{v} R \right) C.$$

$L = L_a + L_i$ ist die gesamte Selbstinduktion, so daß man auch schreiben kann:

$$q^2 = \frac{v^2}{c^2} LC - i v RC.$$

Eine analoge Formel ist für das System zweier Parallel-drähte von E. Cohn¹⁾ auf einem anderen Näherungswege gefunden.

Die Methode der vorhergehenden Abschnitte bestand darin, daß die an ebenen Grenzflächen gewonnenen Resultate auf zylindrisch gekrümmte Flächen übertragen wurden. Dieses Verfahren ließ sich, wie in der Einleitung gezeigt wurde, aus dem Verhalten der Besselschen Funktionen für große Argumente auch mathematisch rechtfertigen, und führte für den Fall des einfachen Drahtes zu fast denselben Resultaten, wie die strenge Behandlung durch Sommerfeld. Es liegt nun nahe, diese Übertragung nicht auf den Fall des Kreiszylinders zu beschränken, und z. B. den Fall einer Schiene mit abgerundeten Ecken nach derselben Methode zu behandeln, wenn vorausgesetzt wird, daß die Krümmungsradien alle groß neben der Eindringungstiefe sind. Aus den Formeln von S. 39 u. 40 ergibt sich daraus ohne weiteres:

$$R = \frac{\mu_1}{n_1} \frac{\pi}{e(\pi \bar{r} + B + D)} \sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2 \tau}},$$

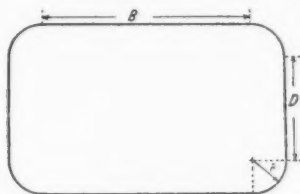


Fig. 4.

wenn \bar{r} , B und D die aus Fig. 4 ersichtliche Bedeutung haben. Für verschwindende D und kleine \bar{r} bei großem B kommt man zu dem Widerstand eines Bleches von der Dicke $2\bar{r}$:

1) E. Cohn, Das elektromagnetische Feld S. 475 ff.; M. Abraham, Math. En cycl. V. 2. S. 526.

$$R = \frac{\mu_1}{n_1} \frac{\pi}{c(\pi \bar{r} + B)} \sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2 \tau}},$$

ein Ausdruck, der sich für sehr große B und kleine \bar{r} , also für relativ dünne Bleche zu

$$R = \frac{\mu_1}{n_1} \frac{\pi}{c B} \sqrt{\frac{\mu_2}{\sigma_2 \tau}}$$

vereinfacht.

Zusammenfassung.

Unter der Voraussetzung, daß die elektrischen Wellen nur wenig in den Leiter eindringen, läßt sich ihre Fortpflanzung an metallischen Drähten mit leitendem Mantel angenähert behandeln und der Widerstand solcher Drähte angeben. Speziell diskutiert wurden die Fälle eines Kupferdrahtes mit Eisenmantel und eines verkupferten Eisendrahtes. In beiden Fällen liefert die Theorie eine Abhängigkeit des Widerstandes von der Mantelstärke, welche den Beobachtungen von F. Trautmann entspricht. Praktisch wichtig ist vielleicht der Fall eines verkupferten Eisendrahtes. Hier führen Theorie und Beobachtung nämlich zu dem Resultat, daß bei geeigneter Mantelstärke der Widerstand nur wenig mit der Wellenlänge variiert.

(Eingegangen 13. Februar 1923.)

3. *Erwiderung auf die Bemerkungen Einsteins über meine Arbeit* *„Beiträge zum kosmologischen Problem“*

(Ann. d. Phys. 68. S. 281. 1922; 69. S. 436. 1922);

von *Franz Selety*.

Herr Einstein hatte die Freundlichkeit, meiner Arbeit „Beiträge zum kosmologischen Problem“ Bemerkungen zu widmen. In einigen Punkten haben meine Darlegungen zu Mißverständnissen Anlaß gegeben.

Die Hauptergebnisse meiner Abhandlung waren:

1. Kleine mittlere Sternengeschwindigkeiten sind mit beliebig großen kosmischen Potentialdifferenzen vereinbar, da Körper mit sehr großen Geschwindigkeiten dennoch überall *genügend selten* auftreten können. Unendlichkeit der Potentialdifferenz gegen das Unendliche ist durch die Erfahrung nicht ausgeschlossen, da diese bloß Endlichkeit der Beschleunigungen erfordert. Die Theorie der isothermen Gaskugel und G. H. Darwins Rechnungen lehren (auf Grund der Newtonschen Theorie), daß sich eine kugelsymmetrische Welt mit unendlicher Masse, in der die Dichte wie r^{-2} verschwindet und das Potential wie $\ln r$ oder noch langsamer unendlich wird, bei beliebig kleinen mittleren Sternengeschwindigkeiten im statistischen Gleichgewicht befinden kann (die Sterne als Atome betrachtet). (S. 292—295.)

2. In der Welt, die ich die molekularhierarchische genannt habe¹⁾, liegt das Potential an der Oberfläche eines

1) Außer den angeführten Schriften von Fournier d'Albe, Charlier und Borel über diese Materieverteilung habe ich inzwischen noch von folgenden erfahren, die teils vor, teils nach meiner Arbeit erschienen sind: H. Holst, Die kausale Relativitätsforderung und Einsteins Relativitätstheorie. Danske Videnskabernes Selskab, Matematisk-fysiske Meddelelser II. S. 11. 1919. (Vgl. Abschnitt V, S. 51 ff.) W. D. Mac Millan, Some postulates of cosmology. Scientia, Februar 1922; und La densité

Systems *n*ter Ordnung (nach der Newtonschen Theorie betrachtet) über einer bestimmten angegebenen Schranke.¹⁾ (S. 301 bis 302, Anm.) Es ist nicht unwahrscheinlich, daß auch hier langsames Unendlichwerden des Potentials die Bedingung für Gleichgewicht zwischen den aus irgendeinem System entfliehenden und in dasselbe eindringenden Körpern ist. Die Grenze, für die das Potential unendlich wird, ist auch hier wie im kugelsymmetrischen System proportionales Wachsen der Massen und Lineardimensionen, bzw. Verschwinden der mittleren Dichten wie r^{-2} . Ein solcher Aufbau der Welt empfiehlt sich auch aus allgemeinen Gründen, da bei Proportionalität aller Längen, Zeiten und Massen die Systeme verschiedener Größe einander dynamisch ähnlich sind. (S. 303—304.)

3. Eine molekularhierarchische Materieverteilung kann in keiner endlichen Zeit in eine angenähert gleichmäßige übergehen und kann (unter geeigneten Annahmen) in keiner endlichen Zeit den molekularhierarchischen Charakter verlieren. (S. 306—307.)

4. Eine molekularhierarchische Welt (die sicherlich nicht in dem groben Sinn wie eine kugelsymmetrische einen Mittelpunkt hat) kann, aber muß nicht ein endliches Gebiet besitzen, in dem schließlich bei Betrachtung immer umfassenderer materieller Systeme die Schwerpunkte verbleiben. In einer speziellen Schematisierung ergab sich die Mannigfaltigkeit der Konstruktionen, die zu einem Mittelpunkt führen, als von abzählbarer Mächtigkeit, die zu einer Welt ohne Mittelgebiet führen, von der Mächtigkeit des Kontinuums. (S. 308—312.)

5. Machs Hypothese, daß in Inertialsystemen die mittlere Beschleunigung und Rotation aller Massen verschwindet, ist in der molekularhierarchischen Welt erfüllt. (S. 322—325.)

6. Wenn die Massen der Systeme wie die Lineardimensionen (oder schneller) wachsen, ist zwar die Geschwindigkeit jedes Körpers in jedem Inertialsystem nach der Newtonschen Me-

moyenne de l'univers peut-elle être finie? Compt. rend. 175. Nr. 22. S. 1044. 1922. A. Costa, À propos d'une note de M. Borel. Compt. rend. 175. Nr. 24. S. 1190. 1922.

1) Vgl. auch die Berechnung des Potentials in der molekularhierarchischen Welt bei Holst a. a. O. S. 54, die im wesentlichen zu dem gleichen Ergebnis wie meine führt.

chanik endlich, nach der der speziellen Relativitätstheorie kleiner als c , die mittlere Relativgeschwindigkeit immer entfernterer Körper nähert sich aber nach der einen ∞ , nach der anderen c , so daß in jedem Koordinatensystem die mittlere Geschwindigkeit aller Körper der Welt jenen Grenzwerten gleichkommt. Es gibt dann kein Koordinatensystem, in dem die Materie der Welt im Durchschnitt ruht oder eine kleinere Geschwindigkeit als c hat, und keines der Inertialsysteme ist zur Beschreibung der Gesamtwelt vor einem anderen im mindesten bevorzugt.¹⁾ (S. 328—332.) — Da ich in bezug auf den früheren Punkt (5.) (z. B. S. 324) darauf hinwies, daß jene Betrachtungen mit der allgemeinen Relativitätstheorie nicht im Widerspruch stehen, so war es ein Fehler, hier nicht zu erwähnen, daß sich das soeben Dargelegte *nicht ohne weiteres* auf die allgemeine Relativitätstheorie übertragen läßt. Meine Betrachtungen setzen nämlich Unendlichkeit der Potentialdifferenz gegen das Unendliche voraus, was nach der allgemeinen Relativitätstheorie mit einer im großen angenähert Minkowskischen Welt nicht vereinbar ist.

Herr Einstein schrieb: „Die molekularhierarchische Welt erfüllt ebenso wenig wie die ‚Inselwelt‘ das Machsche Postulat, nach welchem die Trägheitswirkung des einzelnen Körpers durch die Gesamtheit der übrigen im gleichen Sinne bedingt sein soll wie seine Gravitationskraft.“

Ich habe nun im zweiten Teile meiner Arbeit ausgeführt:
A. daß Machs Annahme, daß in den Inertialsystemen,
bzw. nach der allgemeinen Relativitätstheorie, in
den der Weltmetrik im großen angepaßten Koordinatensystemen die Beschleunigung und Rotation der

1) Wie ich nach Veröffentlichung meiner Arbeit erfuhr, hat H. Holst 1919 den Gedanken ausgesprochen, daß in der „molekularhierarchischen“ Welt beliebig bewegte Koordinatensysteme für die Beschreibung des Gesamtkosmos gleichberechtigt seien (a. a. O. S. 56). Er bezieht dies jedoch auch auf die ungleichförmige Translation und Rotation, was nach meinen Ergebnissen nicht möglich ist. Ferner verlangt Holst Endlichkeit der Potentialdifferenzen gegen das Unendliche, was quasistatische Materieverteilung (kleinere mittlere Relativgeschwindigkeit als c) erfordert, so daß sich dann ein Koordinatensystem finden läßt, in dem die Materie im Durchschnitt ruht, bzw. Minimalgeschwindigkeit hat.

Gesamtmaterie im Durchschnitt verschwinde, eine Hypothese ist, der keine erkenntnistheoretische Notwendigkeit zukommt. (Darauf haben bereits Schlick, De Sitter u. a. hingewiesen.)

B. daß jene Hypothese Machs plausibel und in der molekularhierarchischen Welt erfüllt ist.

Ich habe nicht behauptet, daß in der molekularhierarchischen Welt die weitergehende Forderung Einsteins, die er „Machsches Prinzip“ genannt hat, erfüllt sei (daß das G -Feld durch den $T_{\mu\nu}$ -Tensor bestimmt sei) und auch nicht, „daß die Trägheitswirkung des einzelnen Körpers durch die Gesamtheit aller übrigen im gleichen Sinn bestimmt sein soll wie seine Gravitationskraft“. Ich habe ja mit meinen Überlegungen über die Bestimmung der Inertialsysteme durch die Materieverteilung (ebenso wie seinerzeit Mach) an die Newtonsche Mechanik angeknüpft (S. 315 f.), so daß von einer Bestimmung der Trägheit durch die Materie der Welt *in dem gleichen Sinn* wie der Gravitation bei mir nicht die Rede ist. Wenn ich also (S. 325) schrieb, daß die Trägheit durch die Materieverteilung bestimmt sein könne, so meinte ich dies *nicht in demselben Sinn* wie Einstein, sondern bloß in einem solchen (weniger weitgehenden), in dem man auch auf Grund der Newtonschen Mechanik davon sprechen kann. Es ist dies dann der Fall, wenn man durch praktische Bestimmung von Koordinatensystemen in bezug auf immer umfassendere Massen nach der Methode, nach der zunächst das in bezug auf die Erde, sodann — angenähert — das in bezug auf das Fixsternsystem im Mittel ruhende bestimmt wurde) sukzessiv einem Inertialsystem immer näher kommt. Wenn ich ferner (ebenefalls S. 325) schrieb, daß die Materie alle Maßverhältnisse bestimmen könne, so meinte ich dies ebenfalls in einem anderen Sinne als Einstein.¹⁾

1) Ich hatte dabei den Gedanken im Auge, daß sicherlich (wie vor allem Helmholtz betont hat) alle unsere räumlichen und zeitlichen Maße auf dem Verhalten der „Materie“ im weitesten Sinne beruhen. In diesem Sinne verlangt Bestimmtheit des *metrischen* Feldes, daß *überall* etwas *physikalisch Bestimmtes* (mag man es „Materie“, „Äther“ oder wie immer nennen) vorhanden ist. Darum legte ich auch im ersten Teile meiner Arbeit auf die triviale (aber bisweilen verkannte) Tatsache so

Ich hatte betont, daß die nach der Newtonschen Mechanik vorhandene Möglichkeit, daß es in bezug auf die als ruhend gedachte Gesamtmaterie ein Zentrifugalfeld gebe, bzw. daß die Gesamtmaterie im Durchschnitt in den Inertialsystemen rotiere, etwas *erkenntnistheoretisch* durchaus Denkbare ist. Dasselbe gilt auch für das analoge, in Hrn. Einsteins Bemerkungen zur Illustrierung fingierte, homogene Beschleunigungsfeld in bezug auf die Gesamtmaterie. Es ist freilich eine plausible *Hypothese*, daß in einem Koordinatensystem, in dem die *Weltmaterie* im Durchschnitt *nicht rotiert*, kein kosmisches Zentrifugal- und Coriolisfeld vorhanden ist, ebenso wie die schon in der Newtonschen Mechanik enthaltene *analoge* Annahme, daß in einem Koordinatensystem, in dem die *Materie* im Durchschnitt *keine* translatorische *Beschleunigung* hat, kein kosmisches homogenes *Beschleunigungsfeld* vorhanden ist. Wäre das Zentrifugalfeld oder auch das homogene Gravitationsfeld vorhanden, dann wäre das physikalische Weltbild etwas komplizierter als wenn dies nicht der Fall ist, da dann eine besondere fundamentale Konstante zu den übrigen hinzukäme. Nimmt man aber, um diese durch die Feldgleichungen offen gelassene *Möglichkeit* auszuschließen, die Endlichkeit des Raumes an, dann führt man ja gerade *sicher* eine weitere Konstante ein. Wenn in einer unendlichen quasieuklidischen Welt *tatsächlich* jene besonderen Konstanten (des Zentrifugalfeldes usw.) nicht notwendig sind, dann scheint mir das Weltbild befriedigend, obwohl dann nach der allgemeinen Relativitätstheorie das metrische Feld durch den $T_{\mu\nu}$ -Tensor sicherlich nicht bestimmt, sondern nur gewissermaßen ein wenig „gestört“ wird.

Indem ich betonte, daß nicht einmal die zu der Newtonschen Theorie hinzugefügte Hypothese, daß in den Inertial-

viel Gewicht, daß das Verschwinden der mittleren Dichte der Welt mit vollständiger Raumerfüllung oder mit dem Vorhandensein einer Dichte größer als Null in jedem Raumpunkte vereinbar ist. (S. 283 ff.) Die Bestimmtheit aller metrischen Beziehungen durch den physikalischen Weltinhalt im Sinne von Helmholtz ist auch auf Grund der älteren Physik möglich. In diesem allein erkenntnistheoretisch notwendigen Sinn, in welchem *nichts* über die besondere Beschaffenheit der Naturgesetze folgt, sprach ich von der Bestimmung der Maßverhältnisse durch die „Materie“.

systemen die Materie im Durchschnitt nicht rotiere, erkenntnistheoretisch notwendig ist, habe ich a fortiori zum Ausdruck gebracht, daß dies auch für das viel mehr enthaltende „Mach'sche Prinzip“ Einsteins gilt. Auf die Erfüllung dieses Prinzips muß man allerdings bei einem im großen euklidischen Raum verzichten, aber es scheint mir (ebenso wie De Sitter, Eddington u. a.), daß man sich dazu entschließen kann — trotz der Gravitationseffekte zweiter Ordnung der allgemeinen Relativitätstheorie, die sich als Analoga der Trägheit deuten lassen. Dies gilt besonders dann, wenn die erwähnte Hypothese über die Rotation erfüllt ist, was in der molekularhierarchischen Welt der Fall ist.

Herr Einstein schrieb ferner: „Es sei endlich noch ein weiterer Punkt erwähnt, der nicht nur in der Seletyischen Abhandlung, sondern vielfach in der einschlägigen Literatur Verwirrung stiftet. Die Relativitätstheorie sagt: Die Naturgesetze sind unabhängig von jeder besonderen Koordinatenwahl zu formulieren. . . . Das Relativitätsprinzip behauptet nicht, daß die Welt gegenüber allen Koordinatensystemen in gleich einfacher oder gar in gleicher Weise zu beschreiben sei“ usw.

Es lag mir sicherlich fern, irgend jemandem eine derart unmögliche Auffassung wie die letztere zuzuschreiben. — Die Unterscheidung zwischen der allgemeinen Kovarianz der Gesetze und der Bevorzugung bestimmter Koordinatensysteme für die Beschreibung der konkreten Wirklichkeit habe ich selbst hervorgehoben (S. 325 ff.). Indem ich betonte (S. 327 Anm.), daß die Gründe, die mir gegen die Auszeichnung eines bestimmten Bewegungszustandes oder einer bestimmten Zeitrichtung in der vierdimensionalen Welt zu sprechen scheinen, die gleichen sind, die gegen die Auszeichnung eines bestimmten *Raumgebiets* (Weltmittelpunktes) sprechen, habe ich zum Ausdruck gebracht, daß es sich hierbei nicht um eine Frage handelt, die die allgemeinen mechanischen Gesetze und ihre für mehr oder weniger umfassende Gruppen kovariante Darstellung berührt. — Meine Ausführungen über die Auszeichnung von Koordinatensystemen waren sonach, wie ich glaube von Verwirrung im Hinblick auf die von Einstein hervorgehobenen Unterscheidungen frei. Ich habe bloß auf Gesichtspunkte Ge-

wicht gelegt, die meiner Meinung nach nicht immer genügend in den Vordergrund gestellt werden.

Ich bin allerdings der Ansicht, daß die *Auszeichnung von Koordinatensystemen* für die Beschreibung des Gesamtkosmos für unser Weltbild auch auf Grund der allgemeinen Relativitätstheorie *von sehr großer Wichtigkeit* ist (wie schon Mie, Holst u. a. betont haben). Daß sie nicht gleichgültig ist, ist sicherlich auch Einsteins Ansicht, ein Unterschied der Meinung kann nur darüber bestehen, *wie viel* Gewicht darauf zu legen ist.

Herr Einstein schrieb: „Wenn ich z. B. die wirkliche Welt durch die ‚Zylinderwelt‘ mit gleichmäßig verteilter Masse approximiere und dabei die Zeitachse parallel der Erzeugenden des ‚Zylinders‘ wähle, so bedeutet dies nicht die Einführung einer ‚absoluten Zeit‘.“ Ob es eine „absolute Zeit“ gibt, wenn einerseits die Einsteinsche Gravitationstheorie gilt und andererseits die wirkliche Welt angenähert eine Zylinderwelt ist, hängt natürlich davon ab, was man unter der „absoluten Zeit“ versteht. Es scheint mir aber, daß jene keine unangemessene Ausdrucksweise anwenden, die in diesem Falle von dem Vorhandensein einer absoluten Zeit sprechen und die das Dasein einer solchen im physikalischen Weltbild davon abhängig machen, ob es für die *Beschreibung des konkreten Kosmos* eine ausgezeichnete Zeitachse gibt. In *diesem* Sinn gibt es auch dann schon eine absolute Zeit, wenn die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie gelten und wenn die Gesamtmaterie quasistatisch ist. Wenn das letztere *nicht* der Fall ist, dann kann der Physiker mit Recht geltend machen, daß, wenigstens in seinem Weltbild, eine absolute Zeit bedeutungslos ist, und die Lorentzsche Auffassung bedeutet dann eine überflüssige Komplizierung desselben. Wenn aber eine quasistatische Materieverteilung vorliegt, dann gilt dies nicht mehr in jedem Sinne. Dies hat sehr klar Helge Holst ausgeführt.¹⁾

Im Zusammenhange meiner Arbeit kam es mir bei der Besprechung der Auszeichnung von Koordinatensystemen darauf

1) H. Holst, Zeitschr. f. Phys. 1, S. 32 ff. 1920; *Danske Meddelelser a. a. O.* Abschnitt I.

an, daß, wenn die Welt im großen angenähert Minkowskisch ist, es eine der Weltmetrik im großen angepaßte Schar von Koordinatensystemen gibt, die den Inertialsystemen der speziellen Relativitätstheorie analog sind. Dann ist im Sinne der Annahme, daß die Weltmetrik und die Verteilung der Weltmaterie einander angepaßt sind, anzunehmen, daß in den genannten Koordinatensystemen die (irgendwie geeignet definierte) mittlere Beschleunigung und Rotation der Gesamtmaterie verschwindet. Während nun durch die Weltmetrik der im großen Minkowskischen Welt die Schar der in dieser geradlinig-orthogonalen (bzw. angenähert so beschaffenen) Koordinatensysteme ausgezeichnet ist, besteht keine Auszeichnung unter diesen durch die *geometrische* Struktur der Minkowskiwelt. Es liegt nun im Sinne der *Forderung des Ausschlusses von Singularitäten* (natürlich nicht im funktionentheoretischen Sinn) das Prinzip nahe, daß, *soweit durch die weltgeometrische Struktur im großen keine Auszeichnung besteht, auch durch die Materieverteilung im großen keine Auszeichnung besteht*. Ebenso wie nun durch diese Annahme verlangt wird, daß keine bestimmte *zeitliche Weltlinie* bzw. kein *Punkt* im dreidimensionalen Raum durch die Materieverteilung ausgezeichnet sei, ebenso wird dadurch verlangt, daß in einer Minkowskiwelt durch die Materieverteilung keine *zeitliche Richtung* ausgezeichnet sei. Beide Annahmen sind einander analog.

Ich habe auf Grund der Newtonschen und der speziellen Relativitätstheorie gezeigt, daß die molekularhierarchische Materieverteilung derart beschaffen sein kann, daß einerseits diese Verteilung in dem früher besprochenen Sinn der geometrischen Struktur der Minkowskiwelt (bzw. Galileiwelt) angepaßt ist und daß andererseits *weder eine singuläre Zeitlinie* (Mittelpunkt des Raumes) *noch auch nur eine ausgezeichnete Zeitrichtung* (quasistatisches Verhalten der Materie) vorhanden ist. Die molekularhierarchische Materieverteilung ermöglicht also, ohne mit den älteren Einwänden gegen die unendliche Welt oder mit dem Verordungsseinswand in Konflikt zu geraten, die Existenz einer im großen in jeder Hinsicht singularitätenfreien Minkowskiwelt, für deren Beschreibung keines der Inertialsysteme einen Vorzug besitzt.

Mit der klassischen Theorie ist dies alles mutatis mutandis ebenso wie mit der speziellen Relativitätstheorie vereinbar, mit

der allgemeinen Relativitätstheorie dagegen, wie erwähnt, nur ein Teil davon, so daß die Tatsachen, die für die allgemeine Relativitätstheorie sprechen, gegen dieses, wie mir scheint, im *übrigen in jeder Hinsicht befriedigende Weltbild* geltend gemacht werden können. Nach der allgemeinen Relativitätstheorie ist in einem quasieuklidischen Raum zwar eine molekularhierarchische Welt möglich, aber keine, die nicht quasistatisch und dennoch im mechanischen Gleichgewicht ist. Auf die Möglichkeit, diese Annahmen unter Verzicht auf eigentliche Quasieuklidizität des unendlichen Raumes mit der allgemeinen Relativitätstheorie in Einklang zu bringen, gedenke ich bei anderer Gelegenheit zu sprechen zu kommen.

Wien, den 12. März 1923.

(Eingegangen 15. März 1923.)

4. *Über ausgezeichnete Energiewerte in mechanischen Systemen;* von Alfred Klose.

Einleitung.

Die Bohrschen Untersuchungen über das Atommodell des Wasserstoffs haben gezeigt, wie außerordentlich fruchtbar die Anwendung der Planckschen Quantenidee auch auf dem Gebiete der Atomstrahlung sein kann. Ich möchte im folgenden auf ein rein mechanisches Problem hinweisen, das ebenfalls die Eigentümlichkeit hat, gewisse Energiewerte zu bevorzugen. Während aber im Atom die Energiequantelung postuliert wird, erscheint sie in dem hier zu entwickelnden Problem als statistischer Effekt einer großen Vielheit von Einzelsystemen und als Konsequenz des Newtonschen Gravitationsgesetzes. Dabei tritt die Bevorzugung gewisser Energiewerte erst vom Dreikörperproblem an auf, denn im Zweikörperproblem kann nach der Newtonschen Theorie selbstverständlich jeder beliebige Wert angenommen werden. Obwohl das Vielkörperproblem nach den Beweisen von H. Bruns¹⁾ und H. Poincaré²⁾ außer den bekannten zehn Integralen keine weiteren eindeutigen algebraischen Integrale zuläßt, so gibt es doch eine Anzahl von Speziallösungen, die singulären Werten der Grenzbedingungen entsprechen: die zuerst von Hill³⁾ in allgemeinerer Form eingeführten periodischen Lösungen. Die zu den periodischen Lösungen einer gewissen Klasse gehörigen Integrationskonstanten bilden eine abzählbare Mannigfaltigkeit, sind also von niederer Mächtigkeit als die noch unbekannten allgemeinen Lösungen. Andererseits zeigte P. Stückel⁴⁾, daß,

1) H. Bruns, Ber. d. sächs. Ak. 39. S. 1—39, 55—82. 1887 u. Acta math. 11. S. 25—96. 1888.

2) H. Poincaré, Acta math. 13. S. 259. 1890.

3) G. W. Hill, Americ. Journ. Math. 1. S. 5. 129. 245. 1878.

4) P. Stückel, Math. Ann. 54. S. 86. 1901.

falls gewisse Bedingungen erfüllt sind, nicht nur jeder beliebige Punkt des Raumes von periodischen Bahnen geschnitten wird, sondern daß auch die durch irgendeinen dieser Punkte gehenden Anfangsrichtungen in jedem Winkel überall dicht liegen. Mithin kann jede Bewegung, wenigstens im ersten Zeitmoment, als in einer periodischen Bahn vor sich gehend betrachtet werden. Den Übergang auf endliche Zeiten, die in sehr allgemeinen Fällen auch beliebig groß sein können, erreicht man mit der sehr fruchtbaren Methode des charakteristischen Exponenten.¹⁾ Folglich gestattet die Theorie der periodischen Lösungen nahezu jedes dynamische Problem mit beliebiger Genauigkeit zu diskutieren, indem es nur nötig ist, diejenige periodische Bahn aufzusuchen, die den tatsächlichen Bedingungen am besten genügt.

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit behandle ich die Bewegung eines Satelliten im restringierten Dreikörperproblem unter der Voraussetzung, daß die Bahn bereits nach einem einzigen synodischen Umlauf in sich selbst zurückkehrt. Diese periodischen Satellitenbahnen erster Art werden, soweit sie stabil sind, im zweiten Teil dazu benützt, um die komplizierteren periodischen Bahnen zweiter Art zu konstruieren. Während sich noch im ersten Teil ein zwar endliches, dabei aber kontinuierliches Bewegungsgebiet ergibt, nämlich das der stabilen Lösungen, so wird dieses Gebiet durch die Bahnen zweiter Art in beliebig viele Teile von verschiedener Breite und Intensität aufgespalten, wobei der ständig wechselnde Grad der Stabilität die bevorzugten Energiewerte von den weniger bevorzugten unterscheidet. Im dritten Teile wird gezeigt, daß in der Darwinschen Satellitenfamilie *A* ein zusammenhängendes, dabei endliches Stabilitätsgebiet um Jupiter existiert, wobei der charakteristische Exponent *c* in gesetzmäßiger Weise zwischen einem Minimalwert und 1 veränderlich ist. Mithin existieren in diesem Intervall auch periodische Bahnen zweiter Art. Es existieren also im Darwinschen und in allen ähnlichen Satellitenproblemen tatsächlich bevorzugte Energiewerte. Der vierte Teil schließlich bringt dasselbe Problem in allgemeinerer Form als Sternhaufenproblem. In einem derartigen

1) H. Poincaré, Méth. nouv. 1. S. 162—232. 1892.

System müßten sich, falls nur die Zahl der Körper gehörig groß ist, die im ersten und zweiten Teil entwickelten Verhältnisse direkt nachweisen lassen.

§ 1. Stabilität der periodischen Satellitenbahnen erster Art.

G. H. Darwin hat in seiner berühmten Untersuchung über periodische Bahnen im restringierten Dreikörperproblem¹⁾ u. a. eine Reihe Familien periodischer Satelliten entdeckt. Seine Aufsuchungsmethode ist die des numerischen Experiments. Obgleich aber Darwin nur ganz spezielle numerische Fälle betrachtet, so ist es dennoch gestattet, allgemeine analytische Eigenschaften aus diesen Experimenten herzuleiten auf Grund eines Theorems von F. R. Moulton²⁾, das die Nichtexistenz isolierter periodischer Bahnen beweist und das wir etwa so formulieren können: Lassen die Bewegungsgleichungen eines dynamischen Systems

$$dx_i/dt = X_i$$

für irgendeinen Parameterwert $\mu = \mu_0$ eine periodische Lösung

$$x_i = x_i(\mu_0, T)$$

von der Periode T zu, so bleiben die Lösungen sicher reell und periodisch mit derselben Periode, wenn wir statt μ_0 den Parameterwert $\mu = \mu_0 + \delta\mu$ zugrunde legen, sofern nur $\delta\mu$ nicht zu groß gewählt wird. Als Parameter μ ist vor allem das Massenverhältnis der endlichen Komponenten des mechanischen Systems anzusehen, das neben den Anfangsbedingungen die Bewegungsformen wesentlich beeinflusst. Die Bestimmung der maximalen Parametervariation $\delta\mu$ stößt freilich bei der Darwinschen Arbeit auf zur Zeit noch unüberwindliche Schwierigkeiten. Doch ist die Kenntnis der numerischen Größe von $\delta\mu$ für die hier beabsichtigte Untersuchung nicht erforderlich.

Darwin behandelt in mühevollen numerischen Rechnungen den folgenden Spezialfall des Dreikörperproblems, den man als restringiertes Problem bezeichnet: Eine endliche Masse $m = 1$, im folgenden kurz „Jupiter“ genannt, bewegt sich in

1) G. H. Darwin, Acta math. 21. S. 99—242. 1897.

2) F. R. Moulton, Periodic orbits, S. 487. Carnegie Inst. Publ. 161. Washington. 1920.

einer Kreisbahn vom Radius $r = 1$ mit der (konstanten) Winkelgeschwindigkeit n um die „Sonne“, deren Masse $M > m$ gewählt werden möge. Der dritte Körper, der „Satellit“, bewegt sich in der Ebene der Jupiterbahn. Seine Masse sei, verglichen mit den Massen M und m , verschwindend klein. Unter diesen Festsetzungen sind die Bewegungsgleichungen des Satelliten

$$(1) \quad \begin{cases} d^2x/dt^2 - 2n dy/dt = \partial \Omega / \partial x, \\ d^2y/dt^2 + 2n dx/dt = \partial \Omega / \partial y, \end{cases}$$

wo

$$2\Omega = M(r_1^2 + 2/r_1) + (r_2^2 + 2/r_2),$$

$$r_1^2 = x^2 + y^2, \quad r_2^2 = (x-1)^2 + y^2.$$

Die Koordinaten x, y beziehen sich auf ein mit Jupiter um die Sonne rotierendes System, in dessen Nullpunkt die Sonne steht. Die Differentialgleichungen (1) haben stets das Jacobi'sche Integral

$$(2) \quad v^2 = (dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 = 2\Omega - C$$

mit der willkürlichen Konstanten C . Wir suchen alle Bahnen auf, die in dem rotierenden System periodisch verlaufen, ohne uns jedoch darum zu kümmern, ob diese Bahnen auch in bezug auf die Sonne periodisch bleiben. Darwin stellt an die aufzusuchenden Lösungen noch die weiteren Bedingungen, daß die Satellitenbewegung direkt erfolgen soll und daß die Periode der Bewegung identisch sein soll mit der Dauer eines einzigen synodischen Umlaufs. Ich bezeichne derartige Bahnen als periodische Bahnen der ersten Art. Den Anfangspunkt der Zeit wählen wir stets so, daß sich für $t = 0$ der Satellit an der Stelle $x = x_0 > 1$, $y_0 = 0$ befindet, während die Geschwindigkeitskomponenten $x_0' = 0$, $y_0' = v_0$ betragen sollen. Diese Anfangsbedingungen sind die notwendigen Voraussetzungen für Periodizität von der ersten Art. An Stelle der Anfangsgeschwindigkeit können wir auf Grund des Jacobischen Integrals (2) die Konstante C setzen, so daß sich jede periodische Bahn durch die Größen x_0 und C charakterisieren läßt. Ist nun

$$(3) \quad \begin{cases} x = \hat{x}(x_0, C, t) \\ y = \hat{y}(x_0, C, t) \end{cases}$$

eine Lösung der Differentialgleichungen (1) von der Art, daß

$$\hat{x}(x_0, C, t) = \hat{x}(x_0, C, t + T),$$

$$\hat{y}(x_0, C, t) = \hat{y}(x_0, C, t + T),$$

d. h., ist Gl. (3) eine mit der Periode T periodische Lösung, so läßt sich eine benachbarte Bahn darstellen durch

$$x(t) = \hat{x}(t) + \delta x,$$

$$y(t) = \hat{y}(t) + \delta y.$$

An Stelle der virtuellen Verrückungen δx und δy führt Darwin die normalen und tangentialen Komponenten δp bzw. δs ein durch

$$\delta p = \delta x \cos \varphi + \delta y \sin \varphi,$$

$$\delta s = -\delta x \sin \varphi + \delta y \cos \varphi.$$

Dann ergeben sich die schon von Hill¹⁾ aufgestellten Variationsgleichungen

$$\frac{d^2 \delta p}{dt^2} + \Theta \delta p = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\delta s}{v} \right) + 2 \frac{\delta p}{v} \left(\frac{d\varphi}{dt} + n \right) = 0,$$

$$\Theta = n^2 + 3 \left(\frac{d\varphi}{dt} + n \right)^2 - \frac{\partial^2 \Omega}{\partial p^2}.$$

Führen wir hierin an Stelle der Zeit t die Bogenlänge s ein, so ergibt sich, wenn S die Länge der periodischen Ausgangsbahn stellt,

$$(4) \quad d^2 \delta q / d\sigma^2 + \Phi \delta q = 0,$$

wo

$$\Phi = \Phi_0 + 2 \Phi_1 \cos 2\sigma + 2 \Phi_2 \cos 4\sigma + \dots$$

$$\delta q = \delta p \cdot \sqrt{v} \quad \sigma = \pi (s/S)$$

gesetzt wurde. Die Lösung der Differentialgleichung (4) ist von der Form

$$(5) \quad \delta q = \sum_j (b_j e^{\sigma(c+2j)} V^{-1} + d_j e^{\sigma(-c+2j)} V^{-1}).$$

Die charakteristischen Exponenten c bestimmen sich nach Darwin und Hill aus der Gleichung

$$D^2 = \sin^2(\pi c/2) = \Delta \sin^2(\frac{1}{2} \pi \sqrt{\Phi_0}),$$

wenn Δ die unendliche Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \Phi_1/[1] & \Phi_2/[1] & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \Phi_1/[0] & 1 & \Phi_1/[0] & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \Phi_2/[1] & \Phi_1/[1] & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

1) G. W. Hill, Acta math. 8. S. 1-36. 1886.

und wenn

$$[j] = \Phi_0 - 4j^2$$

bedeutet.

Die Gl. (5) gestattet uns, den Charakter von solchen Lösungen zu studieren, die der periodischen Ausgangslösung benachbart sind, indem nämlich

$$\delta p = v^{-1/2} \cdot \delta q$$

die normale Komponente der Abweichung von der ursprünglichen Bahn vorstellt. Beschränken wir uns darauf, überhaupt nur die säkularen Effekte zu betrachten, so können wir $v = \text{const.}$ setzen, so daß (5) geradezu ein Maß für die Stabilität der periodischen Bahnen vorstellt. Ist c imaginär, so schreitet δq nach reellen Exponentialausdrücken fort. Eine solche Bahn bezeichnen wir als instabil: Der Satellit entfernt sich beliebig weit von der periodischen Ausgangslösung. Ist dagegen c reell, so läßt sich δq in eine Fouriersche Reihe nach Vielfachen von σ und $\sigma \cdot c$ entwickeln, so daß δq eine gewisse Grenze niemals überschreiten kann und in gehörig langer Zeit beliebig oft der periodischen Ausgangsbahn nahe kommt. Eine solche Bahn bezeichnen wir als stabil. Offenbar erhält man reelle Werte c , solange

$$0 \leq \sin^2(\pi c/2) \leq +1.$$

Für $\sin^2(\pi c/2) < 0$ sowohl, wie für $\sin^2(\pi c/2) > +1$ dagegen werden die Werte der Exponenten imaginär. Als Maß der Instabilität kann die Größe

$$D^2 = \Delta \cdot \sin^2\left(\frac{1}{2}\pi \cdot \sqrt{\Phi_0}\right)$$

direkt benützt werden. δq ist dann in jedem der beiden instabilen Fälle eine um den Wert $\delta q = 0$ oszillierende Größe, wobei aber die Amplitude dieser Oszillation mit wachsender Zeit ständig zunimmt, so daß nach einer endlichen Zeit $t = t_1$ der Satellit entweder mit Jupiter zusammenstößt oder gänzlich aus dem Jupitersystem ausscheidet. Wir können den Endeffekt auch so beschreiben: Angenommen, wir haben für $t = 0$ eine große Zahl Satelliten in dem Bereich $\hat{x} - \frac{1}{2}\delta x$ bis $\hat{x} + \frac{1}{2}\delta x$, wo \hat{x} die Koordinaten einer strengperiodischen, aber instabilen Bahn fixiert, so wird es stets eine Zeit $t = t_2$ geben, derart, daß für $t > t_2$ die kleinste Differenz $|\delta x_i - \delta x_k| > E$

bleibt, wo E eine beliebige vorgegebene Zahl bedeutet. Es folgt dies unmittelbar 1. aus der Tatsache, daß die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die zur periodischen Ausgangslösung gehörigen Anfangswerte in Strenge erfüllt werden, gleich Null ist und 2. aus der Tatsache, daß im Zeitpunkt $t = 0$ für irgend zwei Satelliten $\delta x_i = \delta x_k$ mit mathematischer Schärfe nie erfüllt sein wird. Mithin nimmt im instabilen Bereich die mittlere Dichte an der Stelle \hat{x} , die für $t = 0$ als sehr groß vorausgesetzt wurde, mit wachsender Zeit beliebig ab. Bei einer stabilen Ausgangslösung aber bleibt selbst für lange Zeiten jeder Wert $\delta q_i < \varepsilon$, wo ε beliebig klein gewählt werden kann. In der Umgebung einer stabilen periodischen Bahn \hat{x} bleibt also die mittlere Dichte dauernd endlich, indem sie sich einem von Null verschiedenen Grenzwerte nähert.

§ 2. Stabilität der periodischen Satellitenbahnen 2. Art.

Wir nehmen nunmehr an, daß ein Bereich

$$0 < D_1^2 \leq D^2 \leq D_2^2 < +1$$

existiert, mit andern Worten, daß stabile periodische Bahnen möglich sind. Wir können in diesem Bereich die Werte c , welche die Gleichung

$$D^2 = \sin^2(\pi c/2)$$

befriedigen, stets in der Form schreiben

$$c = \pm c_0 \pm 2j,$$

wobei j irgendeine positive Zahl verstellt und wo $|c_0| < 1$ vorausgesetzt werden darf. Ist c_0 reell, so läßt sich aber δq gemäß Gl. (5) durch eine Fourierreihe darstellen. Mithin können auch

$$x(t) = \hat{x}(t) + \delta x$$

$$y(t) = \hat{y}(t) + \delta y$$

in der Form

$$x(t) = \sum \{ E_{j,k} \cos \sigma(k c_0 + 2j) + F_{j,k} \sin \sigma(k c_0 + 2j) \}$$

$$y(t) = \sum \{ G_{j,k} \cos \sigma(k c_0 + 2j) + H_{j,k} \sin \sigma(k c_0 + 2j) \}$$

geschrieben werden. Diese neue Bahn überstreicht im allgemeinen eine ringförmige Fläche überall dicht, solange nämlich c_0 irrational ist. Nur im Falle $c_0 = p/q$, wo p und q ganze, relativ prime Zahlen verstellen, werden die neuen

Bahnen wiederum periodisch. Derartige strengperiodische Lösungen, die durch Variation der periodischen Ausgangslösungen erster Art und durch Verfügung über c_0 gewonnen werden können, bezeichne ich als periodische Satellitenbahnen zweiter Art. Dieser Bildungsprozeß kann fortgesetzt werden, falls die Bahnen zweiter Art ein endliches, begrenztes Stabilitätsbereich besitzen. Auf diese Weise erhalten wir periodische Satellitenbahnen dritter Art und durch Wiederholung solche vierter und höherer Art. Es lassen sich aber bereits an den Bahnen erster und zweiter Art die Eigenschaften dieser „Gruppe periodischer Bahnen durch einen Punkt“ aufzeigen, so daß wir unsere Untersuchung im folgenden auf dieses beschränken dürfen.

Wir können uns die Bedeutung von c_0 anschaulich machen, wenn wir die periodische Bahn angenähert durch eine Ellipse ersetzt denken. Berücksichtigen wir nur das Glied mit dem Argument

$$c\sigma = c \cdot \pi \cdot s / S,$$

so durchläuft der Satellit eine anomalistische Periode, wenn s von $s_1 = 0$ bis $s_2 = 2S/c$ gewandert ist. Es ist also, da S die synodische Periode bedeuten sollte,

$$\frac{c}{2} = \frac{\text{synodische Periode}}{\text{anomalistische Periode}}.$$

Ist c eine rationale Zahl, so kommt also die Ellipse nach einer gewissen Anzahl von Umläufen wieder in die Anfangslage zurück. Berücksichtigt man die wahre Gestalt der periodischen Bahnen und nimmt man auch die oben vernachlässigten Glieder mit, welche ein Vielfaches von $c\sigma$ als Argument enthalten, so verliert zwar c die einfache anschauliche Bedeutung. Die Tatsache, daß sich bei rationalem c die Konstellationen periodisch wiederholen, bleibt aber auch dann noch bestehen. Die Länge der periodischen Bahnen zweiter Art beträgt, wenn die der Bahnen erster Art mit S_1 bezeichnet wird

$$S_2 = 2\eta S_1.$$

Wir haben hier ein dem bekannten Asteroidenproblem sehr ähnliches Problem vor uns, nämlich die Stabilität periodischer Bahnen an Kommensurabilitätsstellen zu untersuchen. Doch lassen sich die dort benutzten Methoden der Potenzentwicklung

nach gewissen kleinen Parametern¹⁾ in dem Darwinschen Falle nicht anwenden. Wir müßten also das Stabilitätskriterium numerisch bestimmen, ein bei der analytischen Kompliziertheit und großen Länge der periodischen Bahnen zweiter Art nahezu undurchführbares Verlangen. Es ist aber auch nicht unbedingt nötig, die Koeffizienten c' dieser neuen Bahnen zu berechnen, denn wir erhalten eine genügend genaue Kenntnis des Stabilitätsgrades auf Grund der folgenden Betrachtung. Ist $c' = p'/q'$ eine rationale Zahl mit möglichst kleinen Zahlen p' und q' , so werden, wie schon bemerkt, dieselben relativen Konstellationen in jeder Periode einmal angenommen, was bei irrationalem c' in Strenge niemals eintritt. Infolge von Resonanzwirkung sind also die Störungen in einer kommensurablen Bahn größer als in einer benachbarten inkommensurablen. Ohne zu entscheiden, ob die Bahnen zweiter Art stabil oder instabil sind, erkennen wir also, daß die Stabilität um so gefestigter ist, je mehr sich c' von einem kleinzahligen Kommensurabilitätsverhältnis p'/q' unterscheidet. Als Ordnungselemente können die Zahlen $|p' - q'|$, der Grad der Kommensurabilität sowie $|q'|$, der in die Periodenlänge eingehende Faktor gelten. Je größer $|p' - q'|$ und je größer $|q'|$ wird, um so „stabiler“ wird die Bahn.

Die Verteilungsbetrachtung des ersten Abschnittes stellen wir auch hier an. Wir denken uns zur Zeit $t = 0$ in dem Intervall $c' - \frac{1}{2}\delta c'$ bis $c' + \frac{1}{2}\delta c'$, wo $c' = p'/q'$ der einzige niedrigzahlige kommensurable Wert des Intervalls sein möge, eine große Anzahl Satelliten. Es gibt dann nach dem obigen eine Zeit $t = t_1$, von der ab an der Stelle $c' = p'/q'$ die mittlere Verteilungsdichte der Satellitenbahnen geringer ist als an jeder andern Stelle des Intervalls

$$c' - \frac{1}{2}\delta c' \leq c' \leq c' + \frac{1}{2}\delta c'.$$

Sind für die kommensurablen Fälle die Bahnen instabil, so ist die Verteilungsdichte im instabilen Gebiet sogar gleich Null, d. h. es entstehen säkulare Lücken in der Verteilung.

1) H. v. Zeipel, Ark. Mat. Astr. Fys. 10. Nr. 30. 1915; K. Hirayama, Ann. Obs. Tokyo. app. 2. 1917. 4., 5. 1918; A. Klose, Astr. Nachr. 218. S. 401. 1923.

Nachweisbar wird diese Erscheinung aber erst bei einer großen Anzahl von Einzelsystemen. Aus diesem Grunde soll auch im letzten Abschnitt ein System höherer Ordnung diskutiert werden.

§ 3. Die Darwinschen Satelliten.

Darwin wählt, um möglichst große Störungen zu erhalten, das Massenverhältnis $m/M = 1/10$. Durch Variation z. B. von C , bei festgegebener Anfangslage x_0 , bestimmt er diejenigen Wert C_0 , der zu einer periodischen Bahn erster Art führt. Wir wollen aus naheliegenden Gründen diejenigen Satellitenfamilien übergehen, die als entartet zu betrachten sind, nämlich diejenigen Bahnen, welche Lemniskaten- oder Ellipsenform um beide Massenzentren M und m haben, desgleichen diejenigen Familien, deren Bewegung nur in Oszillationen um eines der Lagrangeschen Librationszentren besteht. Es bleiben dann noch drei, durch positive Bewegungsrichtung charakterisierte Familien übrig.

Satellit A. Für sehr große Werte der Integrationskonstanten C ergeben sich kreisähnliche Bahnen um Jupiter. Für $C < 39,5$ geht die Bahn in eine lemniskatenähnliche Figur um Jupiter und das innere Librationszentrum über.¹⁾ Die Bahnen sind stabil, solange die Librationsschleife noch nicht existiert. Mithin ist der stabile Zweig dieser Familie charakterisiert durch Werte von C zwischen 39,5 und $+\infty$. Zu dem stabilen Zweige gehört übrigens, wenigstens angenähert, unser Erdmond. Interessant ist der Verlauf des Stabilitätskriteriums

$$D^2 = \Delta \sin^2 \left(\frac{1}{2} \pi \sqrt{\Phi_0} \right),$$

wenn wir uns wiederum auf den stabilen Teil der Familie beschränken. Für sehr große Werte von C ist D^2 offenbar nahezu $+1$. Für kleiner werdendes C nimmt D^2 zunächst ab, um bei $C = 40,25$ etwa mit $D^2 = +0,063$ sein Minimum zu erreichen. Von da an wächst es rasch bis zur Instabilitätsgrenze $C = 39,5$ auf $+1$ an. Der eben erwähnte Wert

1) Nach S. S. Hough, Acta math. 24. S. 257—288. 1901 bilden übrigens die lemniskatenähnlichen Bahnen nicht die analytische Fortsetzung des stabilen Zweiges der Familie A.

$C = 40,25$ ist weiterhin noch dadurch ausgezeichnet, daß zu ihm der maximale Anfangswert $x_0 = 1,1150$ gehört. Die untere Grenze der x -Koordinate ergibt sich offenbar als der sonnennächste Punkt der an der Stabilitätsgrenze $C = 39,5$ liegenden Bahn. Dieser dürfte bei $x_1 = 0,77$ zu suchen sein, während der größte Sonnenabstand in diesem Falle nur 1,0334 beträgt.

Satellit B und C. Diese beiden Familien lassen sich aus einer einzigen singulären Bahn herleiten. Es sind im allgemeinen ellipsenähnliche Bahnen, wobei die große Achse senkrecht auf der Verbindungslinie Sonne-Jupiter steht. Die Satelliten vom Typus *B* sind durchweg instabil, dagegen existiert ein wenn auch nicht sehr großer Bereich, in dem der Typus *C* auf stabile Bewegungen führt. Diese Satelliten beanspruchen aber, wie es scheint, weniger Interesse, weil, wie Moulton nachgewiesen hat, die Familien *B* und *C* wenigstens für kleine Massenverhältnisse m/M nur im komplexen Gebiet existieren.

Es bleibt also nur der stabile Zweig der Familie *A* übrig, so daß die stabilen periodischen Satellitenbahnen erster Art in ein enges Intervall eingeschlossen werden. Befindet sich der Satellit zu Beginn der Bewegung in äußerer Lage bzgl. Sonne-Jupiter, so kommen als Anfangskoordinaten nur die Werte x_0 zwischen 1,0 und 1,1150 in Frage, befindet er sich zwischen Sonne und Jupiter, so sind nur Werte zwischen 1,0 und 0,77 zulässig. Da die Darwinschen Satelliten ein endliches Stabilitätsbereich besitzen, so existieren also auch periodische Bahnen zweiter Art mit ihren früher diskutierten Stellen „größerer“ und „kleinerer“ Stabilität. Wenngleich die Perioden der Bahnen erster und zweiter Art sich um endliche und zum Teil recht beträchtliche Größen unterscheiden können, so bleiben ihre Energiekonstanten nahezu dieselben. Wir können demnach periodische Satellitenbahnen beliebig hoher Art ersetzt denken durch Bahnen erster Art, wenn wir nur diejenigen Energiewerte nicht zulassen, welche in der Umgebung eines kleinzahligen kommensurablen Wertes von c liegen.

§ 4. Satellitenbahnen im Kugelhafenproblem.

Wir fragen uns nunmehr, unter welchen Bedingungen die in den ersten Abschnitten entwickelten Auswahlprinzipien sich in der Natur verwirklichen lassen. Da es sich um statistische Effekte handelt, so ist eine große Anzahl von Einzelsystemen nötig. Diese können dadurch entstehen, daß Jupiter von einer sehr großen Anzahl Satelliten umkreist gedacht wird. Es gibt dann soviel Einzelsysteme wie Satelliten, wobei eine gegenseitige Störung nur durch Zusammenstoß von Satelliten möglich ist. Wir kennen zurzeit tatsächlich ein derartiges System: Saturn mit seinen aus kleinsten Satelliten gebildeten Ringen.

Im folgenden möchte ich aber noch auf eine andere Möglichkeit hinweisen, die es gestattet, eine große Zahl gleichgebauter Systeme nebeneinander (nicht ineinander wie beim Saturnsystem) zu erhalten. Ich meine die sog. kugelförmigen Sternhaufen. An direkte Nachprüfung ist hier allerdings wegen der großen Entfernung dieser Haufen nicht zu denken. Es erscheint aber möglich, vielleicht indirekt die Richtigkeit der Theorie nachzuprüfen. Im übrigen scheint mir dieses Kugelhafenproblem nicht ohne Interesse für die moderne Atomphysik zu sein. Allgemein läßt sich dieses Problem freilich nicht integrieren. Ich beschränke mich daher auf einen von E. Strömgren¹⁾ durchgerechneten Spezialfall, der für die Astronomie eine gewisse Bedeutung besitzt. Die Dichte ρ setzt Strömgren als Funktion des Radius an in der Form

$$\rho = [3/(3 + r^2)]^{3/2}.$$

Wenn wir nur die Gesamtwirkung des Haufens auf die Einzelkörper berücksichtigen, so lassen sich die Differentialgleichungen der Bewegung genau integrieren. Man erhält für die Länge in der Bahn w und die Zeit t elliptische Integrale dritter Gattung.

$$w = \pm c \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{h^2 + 2/\{ \sqrt{3 + r^2} - (c/r)^2 \}}},$$

$$t = \pm \frac{1}{2\sqrt{3}\pi^2} \int \frac{dr}{\sqrt{h^2 + 2/\{ \sqrt{3 + r^2} - (c/r)^2 \}}}.$$

1) E. Strömgren, Astr. Nachr. 203, S. 17, 1917.

Betrachten wir eine Kugelschale vom inneren Radius r und vom äußeren Radius $r + dr$, so sind in dieser Schale am häufigsten diejenigen Massen des Haufens vertreten, deren Bewegung in einem Kreis um das Kugelzentrum erfolgt. Diese Körper werden weiterhin nahezu dieselbe Masse besitzen, weil sie andernfalls nach dem dritten Keplerschen Gesetze sich schließlich gegenseitig aufzehren müßten. Die übrigen Mitglieder des Kugelhaufens, deren Bewegung näherungsweise durch rotierende Ellipsen darstellbar ist, durchschreiten, wenn überhaupt, nur für relativ kurze Zeit die betrachtete Kugelschale. Von sehr kleinen Massen können sich nur stabile Satelliten in gesicherten Bahnen halten. Wir haben also innerhalb der Kugel vom Radius $r + dr$ Systeme von der im ersten bzw. zweiten Abschnitte behandelten Art in sehr großer Zahl. Als Repräsentanten Jupiters haben die stationären Mitglieder der Kugelschale zu gelten, wogegen die Sonne von der Gesamtmasse der inneren Kugel gebildet wird, so daß sich ihre Masse zu

$$M = 4\pi \int_0^r r^2 \rho dr = 4\pi \cdot \sqrt{3} r^3 / (3 + r^{27/2})$$

ergibt. Der makroskopische Effekt ist derselbe wie der bei den Darwinschen Satelliten beobachtete: Betrachten wir die Gesamtheit der Satelliten unserer Kugelschale, so tritt keineswegs jeder Wert der Energiekonstanten gleich häufig auf. Vielmehr läßt sich eine abzählbar unendliche Menge von Energiewerten angeben, die außerordentlich viel häufiger angenommen werden als gewisse Nachbarwerte.

Diese merkwürdige Energieverteilung ist übrigens keinesfalls nur den hier skizzierten Satellitenproblemen eigentümlich. Sie scheint vielmehr in allen mechanischen Problemen eine Rolle zu spielen, soweit es sich um Systeme materieller Punkte handelt, deren Zahl größer als 2 ist. Durch Vertauschung der Zentren kommen wir z. B. vom Satellitenproblem zum Asteroidenproblem. Im Ring der kleinen Planeten zwischen Mars und Jupiter haben wir das glänzendste Beispiel für das auf Kommensurabilitäten gegründete Auswahlprinzip. Daß auch

in gewissen Vielkörperproblemen mit mehr als drei materiellen Punkten ähnliche Auswahlprinzipien gelten, will ich in einer andern Arbeit nachweisen.

Zum Schluß möchte ich nicht unterlassen, für das Interesse und die Unterstützung zu danken, welche die vorliegende Untersuchung von seiten der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft erfahren hat.

Greifswald, Astron. Institut der Universität,
20. Januar 1923.

(Eingegangen 4. April 1923.)

tiellen
einer

rease
nter-
ssen-